B

Ad Bibliothecam

Canoniæ SS. Apoſt. Petri & Pauli

in Weyarn

comparavit

P. VALENTINUS HANSCH Conventualis ibid.

TITULUS SCRINII.	SERIES.	NUMERUS.

Math Un 78 (3

Mathesis .. Systemata & methodi

129.

Erläuterungen

der

Kästnerischen

Anfangsgründe

der

Arithmetik, Geometrie

ebenen und sphärischen

Trigonometrie.

Dritter Theil.

Altenburg,
in der Richterischen Buchhandlung
1781.

Dem

Wohlgebornen Herrn

Herrn

Johann Friedrich Wilhelm Charpentier

Sr. Churfürstl. Durchl. zu Sachsen hochbestaltem Berg-Commissions-Rathe, Assessorn des Ober-Bergamts und der Mathematik und Physik Professorn bey der Bergakademie zu Freyberg.

Meinem theuersten Lehrer und Gönner.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Wohlgeborner Herr,

Hochzuverehrender Herr Bergcommissionsrath,

Der gütige Unterricht den Eu. Wohlgebornen in der Mathematik und Physik mir ertheilt, nebst vielen andern Wohlthaten deren Dieselben mich gewürdiget haben, veranlassen mich Ihnen gegenwärtige Schrift mit der größten Ehrerbietung zuzueignen.

So schätzbar mir immer Dero Unterricht gewesen: so ermunternd sind die neuen Beweise Ihres gütigen Wohlwollens gegen mich. Dieß macht es mir zur Pflicht Eu. Wohlgebornen hierdurch öffentlich meinen schuldigsten Dank abzustatten.

Ich werde alle meine Wünsche erreicht haben, wenn Ihnen diese Arbeit gefallen und

mich Dero Wohlgewogenheit fernerhin würdig machen sollte.

Mit dem innigsten Wunsche daß die Vorsicht Eu. Wohlgebornen nebst Dero Familie in beständigen Wohlseyn erhalten wolle, habe ich die Ehre mit der vollkommensten Hochachtung lebenslang zu verharren

Wohlgeborner Herr,

Hochzuverehrender Herr Bergcommissionsrath

Eu. Wohlgebornen

Leipzig
im Wonnemonat 1781.

ergebenst gehorsamer
Johann Friedrich Lempe.

Vorrede.

Vorrede.

Die ebene Trigonometrie besonders die sphärische, ist eigentlich zum Besten der Astronomie erfunden worden. Sie hat aber auch auf die mechanischen und optischen Wissenschaften, wie auf die ganze vermischte Mathematik

einen großen Einfluß. Algebra und Analysis haben ihr viele Vortheile zu danken, so wie sie selbst mittelst diesen Disciplinen sehr erweitert worden. Wie nöthig dem Feldmesser die Trigonometrie ist, lernt man am besten aus Herrn Professor Mayers practischen Geometrie; wie sehr sie aber dem Markscheider nützt zeigen die Schriften des Herrn von Oppels und Herrn Hofrath Kästners über die Markscheidekunst, auch hoffe ich in dem diesem dritten Theile beygefügten Anhange eben diese Absicht erreicht zu haben.

Zu dem Ende wollte ich nicht abgebrochne Stücken aus der Markscheidekunst beybringen, und sie nach meiner Art behandeln; weil ich sonsten nur für solche deren Hauptgeschäfte diese Kunst ist, verständlich

seyn

seyn dürfte; und nicht einmal für diese alle, da noch vielen die Lobrede, daß sie die Gründe dieser Lehren nicht verstehen, und kaum wissen, daß selbige in eine Wissenschaft gehören, mehr gefällt als die angenehmste Musik.

Die Materien die in diesem Anhange vorkommen, sind folgende: I. Grundbegriffe der Markscheidekunst. Diese habe ich noch in keinem Markscheidebuche gehörig angegeben und auseinander gesezt gefunden *). II. Lachtermaaß. III. Beschreibung der vornehmsten Werkzeuge. IV. Ihr Gebrauch.

In

*) Ob dieß Herr König in seiner vom Herrn Jahrs vorigen Jahres herausgegebene Geometrie souterraine gethan hat, weiß ich nicht, da ich sie noch nicht habe erhalten können; wie es aber Herr Reinhold im 1. Theile seiner aufs Recht angewandten Geometrie ausgeführt hat, ist noch zu hoffen.

Vorrede.

In diesem leztern Abschnitte habe ich in wenigen Paragraphen, das vornehmste, die Markscheiderwerkzeuge zu prüfen, und ihre Fehler in Anschlag zu bringen mit beygefügt. Ich hätte dieß nach der Absicht des Anhanges übergehen können; allein mir schien es nicht überflüßig Anfängern der Markscheidekunst davon auch hier etwas beyzubringen, sie dabey mit der Methode des Herrn Hofrath Kästners den Gradbogen zu prüfen, und mit einigen andern der Werkzeuge Prüfung, worauf mich meist die in Herrn Professor Mayers practischen Geometrie, gebracht haben, bekannt machen. V. Findung des reducirten Streichens; VI. Den söhligen Winkel zwoer Linien. VII. Sohle und Seigerteufe. VIII. Länge und Breite. Das Verfahren des Herrn von Oppel in dem Anhange zu seiner Markscheide-

scheidekunst ist nicht so bequem, als wie ich hier nach dem Herrn Bergmer Scheidhauer beygebracht habe; daß es aber in die Markscheidekunst einen großen Einfluß hat, wird man aus sehr vielen Stellen dieses Aufsatzes sehen. IX. Abziehen. X. Berechnung der Züge. XI. Grund- und Seigerriß. XII. Einige Aufgaben auf viele Fälle des Bergbaues anwendbar. XIII. Bestimmung der Lage des Ganges durch Rechnung. XIV. Kreußlinie oder zwoer Gangesebnen Durchschnitt. XV. Ausstreichen. XVI. In wie ferne zwo an ein paar Stellen entblößte Gänge einerley sind; und XVII. Vierung. Ich hoffe hierdurch das meiste was in der Markscheidekunst vorkommt beygebracht und die Sachen so dargestellt zu haben, als man von einem Beytrage (der zugleich ein kleines Ganze der unterirdi-

terirdischen Geometrie liefern sollte) zur richtigern Ausübung der Markscheidekunst verlangen kann. Diese auf ähnliche Art behandelt wie Herr Professor Mayer die Feldmeßkunst, ist ohnstreitig ein sehr nützliches Unternehmen. Dieß dürfte daher in der Folge mit meine Beschäftigung seyn, wenn dieser kleine Versuch das Glück einer guten Aufnahme haben sollte.

Uebrigens ergreife ich diese öffentliche Gelegenheit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer für seinen gütigen Unterricht in der Markscheidekunst und andere Lehren ꝛc. gehorsamsten Dank abzustatten.

Leipzig im Ostermonat
1781.

Johann Friedrich Lempe.

Dritter Theil.

Erläuterungen

der

Kästnerischen ebenen und sphärischen Trigonometrie.

1. Erklärung.

Die Trigonometrie unterscheidet sich nur in der Methode von demjenigen Theil der Geometrie, der sich mit den Dreyecken beschäftiget; indem daselbst das Unbekannte eines Dreyecks aus dem Bekannten desselben durch Zeichnung, hingegen hier, (in der Trigonometrie) durch Rechnung, gefunden wird.

Sie theilt sich, wie schon aus Vorer. 9. bekannt, in die ebene und sphärische Trigonometrie. Was die ebne Trigonometrie sey, lehrt im Buche diese 1. Erklärung, und man sieht daß sie geradlinichte Dreyecke zum Gegenstand habe; da hingegen die sphärische Trigonometrie mit sphärischen, d. i. mit solchen Dreyecken umgeht, deren Seiten, Bogen größter Kreise auf einer Kugel Oberfläche, sind. (2. Erkl. auf der 434 Seite.)

Der 1. Erkl. Zusatz.

Die gegebenen Stücken eines geradlinichten Dreyecks, müssen entweder

1) zwo Seiten und ein Winkel; (wo zween Winkel und eine Seite zu suchen) oder

2) zween Winkel und eine Seite; (wo zween Seiten und ein Winkel zu finden) oder

3) alle drey Seiten, (wo man alle drey Winkel findet),

seyn; weil eines von diesen, ein einziges Dreyeck bestimmt, wie aus der Geometrie bekannt ist.

Alle drey Winkel dürfen nicht gegeben werden.

Denn diese bestimmen unzählig viel ähnliche Dreyecke, (Geom. 26. S.) und also findet man dadurch nicht die drey Seiten eines einzigen Dreyecks, sondern unzählig vieler; aber in der sphärischen Trigonometrie können aus den drey Winkeln eines sphärischen Dreyecks seine Seiten gesucht werden, wie in der Folge erhellet. —

Wegen der Werkzeuge und unserer Sinne Unvollkommenheit, kann man nach der geometrischen Methode bey Verzeichnung eines Dreyecks und der Abmessung des zu suchenden Theils nicht so genau verfahren als es eigentlich seyn sollte, und muß also nothwendig Fehler begehen; da man hingegen bey der trigonometrischen Methode des Dreyecks Verzeichnung und das Abmessen des Unbekannten entbehren, durch Rechnen aber, (wie alle Größen) viel genauer finden kann, weil durch den Verstand die kleinsten Theile die durch die

Sinne

Sinne gar nicht mehr zu bemerken seyn, deutlich unterschieden werden können.

Denn wenn man z. E. eine Weite von 200 Fuß, etwa die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks, (welcher Fall unter andern bey den Markscheidern oft vorkommt,) mittelst der Geometrie angeben wollte, so geschieht dieß, wie bekannt, indem man auf dem Papiere ein ähnliches Dreyeck verzeichnet, und durch den verjüngten Maasstab die Hypothenuse mißt. Wäre nun 10 Fuß des verjüngten Maasstabs = 1 Zoll, und hätte man im Abmessen der gefundenen Hypothenuse, nur um $\frac{1.}{100}$ eines Zolls gefehlt, so würde dieser Fehler $= \frac{200}{100}$ Fuß $= 2$ Fuß seyn; wenn auch bey den übrigen Verfahren nicht der geringste Fehler vorgefallen ist; welches doch nicht geschieht, zumal da man nicht mit der erfoderlichen Genauigkeit Winkel auf das Papier tragen, ob man sie gleich mit guten Instrumenten bis auf Secunden und Theile derselben, ausmessen kann.

Uebrigens sind am Himmel oft Linien von 1000 und mehr Millionen Meilen anzugeben.

Will man dieß durch Verzeichnung bewerkstelligen, so würde man, wenn dabey ein Fehler von $\frac{1}{1000}$ Zoll begangen würde, kann eine und mehr

Millionen Meilen fehlen, wenn auch alles übrige ohne Fehler abgelaufen wäre.

Hieraus nun werden Anfänger sehen, wie nothwendig ihnen die Erlernung der Trigonometrie ist, welchen Gebrauch sie auch von der Mathematik machen. —

In jedem geradlinichten Dreyecke steht allemal dem größern Winkel die größere Seite gegenüber; (Geom. 9. S. 6. Z.) man darf aber daher nicht schliessen, daß die Winkel sich eben so wie die gegen über stehenden Seiten verhalten.

Denn verhielten sie sich so: so müßte, wenn (Fig. 32.) der Winkel ABa = 2 ABC = 2 Cba wäre, auch Aa = 2 AC = 2 . aC seyn; dieß ist aber nicht, wie aus Geom. 9. S. 7. Zus. erhellet. Die Kreisbögen, worauf die Winkel stehen, verhalten sich auch nicht wie die entgegenstehenden Seiten eines Dreyecks, weil jene sich wie die ihnen zugehörigen Winkel verhalten:

Daher kann die Regel Detri zu Berechnung der Winkel und Seiten eines Dreyecks aus gegebenen Winkeln und Seiten nicht gebraucht werden, wenn man auch statt des Verhältnisses der Winkel das Verhältniß der ihnen zugehörigen Bogen setzen wollte. Hieraus nun wird begreiflich seyn, wie man genöthiget gewesen ist, in der Trigonometrie gewisse Linien zu finden, die sich statt der Winkel und ihren zugehörigen Bögen setzen

lassen,

lassen, und mit den Seiten der Dreyecke in Verhältniß stehen.

Diese Linien werden nun in den folgenden 4 Erklärungen aufgestellt.

2. Erklärung.

AD (Fig. I.) sey ein Bogen eines Kreises um C;

Seine Endpuncte A, und D.

Einen von diesen A z. E. nehme man für einen Anfangspunct an, von dem weg man allezeit, in einem Kreise des Bogens, AD, Richtung nimmt;

Aus dem Mittelpunct C, dieses Kreises aber, seyn nach besagten Endpuneten A und D, die beyden Halbmesser CA, CD, gezogen.

Wenn man nun von dem einen Endpunct D, auf den Halbmesser CA, der durch den Anfangspunct A geht, ein Loth DE, zieht;

So heißt dieses der **Sinus** des Bogens AD.

Das Zeichen womit man die Sinus anzeigt, ist entweder der erste Buchstabe, oder die drey ersten Buchstaben, dieses Worts.

Daher wird DE oder des Bogens AD Sinus so ausgedruckt:

f. AD oder fin AD.

2. Erkl. 1. Zusatz. Exempel.

und . . . . . Halbmessers]

DE = fin AD;

Aber

$$AD = \tfrac{1}{2} DAF \text{ (Geom. 22. S. 2. Z.)}$$

Nun soll der Bogen

$$DAF = 60°$$

seyn: Folglich

$$AD = 30°;$$

Also ist

$$DE = \sin 30°.$$

Da nun

DF als die Sehne von $60° =$ dem Halbmesser CD;

DE aber $= \tfrac{1}{2}$ DF (1. Zus.)

also

$$DE = \tfrac{1}{2} CD;$$

so ist

der Sinus von $30° =$ der Hälfte des Halbmessers.

Ist DAF . . . . . quadr.]

Wenn (Fig. I.) der

Bogen $DAF = 90°$

oder ein Quadrant ist;

So ist der ihn zugehörige

Winkel DCF ein rechter (Geom. 22. S. 4. Z.)

Also das

Dreyeck DCF ein rechtwinklichtes:

Folglich

$$DCq + CFq = DFq \text{ (Geom. 15. S.)}$$

Nun ist aber

$$DC = FC \text{ (Geom. 12. Erkl.)}$$

daher

daher $DCq = FCq$ (Geom. 15. S. 1, Z.)

Also $2 . DCq = DFq$

folglich $\sqrt{2} . DCq = DF$

Aber $\frac{1}{2} DF = DE$, (1. Zuf.)
$= \sin AD$ (2. Erkl.)

und $AD = 45°$ (weil $DAF = 90°$ seyn soll und $AD = AF = \frac{1}{2} DAF$ [Geom. 22. S. 2. Z.])

Mithin $\sin 45° = \frac{1}{2} DF$; folglich
$= \frac{1}{2} \sqrt{2} . CDq.$

2. Erklärung. 2. Zusatz.

Des ..... einerley Sinus]

Ein Bogen, wie DHB, der größer als 90° ist, hat eben den Sinus, der dem Bogen, wie AD, welcher mit DHB, 180° ausmacht, zugehört.

Denn, des Bogens DHB Sinus ist das Loth, DE, so von dem einen Endpuncte D dieses Bogens, auf den durch den andern Endpunct B, (der für diesen Bogen BD der Anfangspunct ist) gehenden Halbmesser CB gefällt wird. (2. Erkl.)

Da aber DCB ein stumpfer Winkel; so fällt das Loth DE, auf die Verlängerung CA des Halbmessers CB, oder auf den andern Halbmesser CA der mit CB in gerader Linie liegt.

Aber dieses Loth DE ist auch der Sinus des Bogens AD, weil D auch der eine Endpunct gleich genannten Bogens ist, und von D auf AC kein anderes Loth als DE gefällt werden kann. (Geom. 9. S. 4. Z.)

. . . . so würde Bf = AD]
DHfB = ADHF (wie angen. wird)
DHF = DHF (beyden gemein)

Also
DHfB — DHF = ADHF — DHF
d. i. Bf = AD

. . . und das . . . . . = CE (G. 3. S.)]

Das Perpendikel fe, (Fig. I.) ist der 2ten Erklärung gemäß:

Denn es geht von dem einen Endpuncte f, des Bogens fB auf den Halbmesser der durch dieses Bogens andern Endpunct, (als den Anfangspunct) B, streicht;

Also ist
fe = sin fB

Aber fB und ADHf machen zusammen 180° aus:

Folglich ist fe auch dieses andern Bogens ADHf Sinus; wie auch schon aus der Entstehung des

Sinus

Sinus für diesen Bogen, wenn man zu seinen Anfangspunct A, nimmt, erhellet.

Weil nun

AD = Bf;

so ist auch der

W. ACD = fCB (Geom. 22. S.)

überdieß,

EDC = Cfe (Geom. 13. S. 2. B.)
CD = Cf (Geom. 12. Erkl.)

Also:

Δ DEC = Δ feC (Geom. 3. S.)

und folglich:

DE = fe
CE = Ce.

... so ist ..... = HD]
HfB = ADH (denn jeder = 90°)
Bf = AD

Also:

HfB — fB = ADH — AD

d. i.

Hf = HD.

Dem Bogen AD fehlt so viel zu 90° als der Bogen DH beträgt: Eben so viel aber beträgt der Bogen Af über 90°, nämlich Hf = HD.

Da nun die Bogen Bf und AD einerley Sinus haben; Aber

Bf = 90° — Hf
= 90° — DH

so ist

$$\sin Bf = \sin (90° - Hf)$$
$$= \sin (90° - DH)$$
$$= \sin AD.$$

Bogen also ꝛc. (S. Buch.)

2. Erklärung. 3. Zusatz.

. . . . und wächst]

Denn die Sehne DF bekommt so immer kleinere und kleinere Entfernungen von dem Mittelpuncte C, sie wird also dadurch vermöge Geom. 18. Satzes größer.

Da nun die Sehne DF auf die Art immer wächst, wenn es ihr Bogen DAF thut; so wächst auch DE, als der Sehnen DF Hälfte, wenn der Bogen AD, zunimmt.

Die Sinus ꝛc. (S. Buch.)

. . . . so nimmt . . . . . wird]

Je größer der Bogen Af, (= AD) wird, je mehr rücken f und d nach B, und je mehr entfernt sich die Sehne fd vom Mittelpuncte C:

Sie wird also auf die Art immer kleiner, (S. 18. S.) also auch ihre Hälfte fe, oder des Bogens fB Sinus.

Die Sinus der Bogen über ꝛc. (S. Buch.)

2. Erklärung. 4. Zusatz.

Wenn DC . . . . . Sinus]

Des Bogens ADHBd Sinus erhält man, wenn man von dem Endpuncte d desselben, auf den durch

seinen

seinen Anfangspunct A gehenden Halbmesser AC oder (wir hier) auf dessen Verlängerung CB, das Loth de, fällt (2. Erkl.)

Ein . . . . . = AD]

W. DCA = dCB (Geom. 8. S. 4. Z.)

Also: der

B. AD = dB (Geom. 22. S. I.)

Folglich:

die Sehne von 2 . AD = Sehne 2 dB (das. I. Z.)

oder:

die halbe Sehne von 2 . AD = der halben Sehne von 2 dB

d. i.

der Sinus AD = dem Sinus von dB (I. Z.)

Also hat ein Bogen, wie ADHBd, der größer als 180° ist, einen eben so großen Sinus, als der Bogen, wie AD, der so viel unter 180° beträgt, als jener, (ADHBd,) 180° übertrift;

Oder:

sin (180° + Bd), [= sin (180° + AD) weil AD = Bd], ist = sin AD.

Eben dieß . . . . . Sinus hat]

Der Sinus des Bogen ADHBhF, der größer als 3 . 90° = 270°, ist das Loth FE, weil es von dem Endpuncte F dieses Bogens, auf den durch seinen Anfangspunct A, gehenden Halbmesser, AC, gezogen ist. (2. Erkl.)

Es

Es sey

$$AF = fB,$$

also

$$AF = AD;$$

So wird

$$FE = fe$$ (2. Erkl. 1. B. u. Geom. 22. S.)

also auch

$$FE = DE$$

seyn. Aber

$$FE = \sin ADHBhF$$
$$= \sin (270° + hF);$$
$$= \sin (180° + BhF)$$

und

$$fe = \sin BHD;$$

Also

$$\sin BHD = \sin (180° + BhF)$$

Da nun der Bogen

$$BHD = BhF$$

(weil jeden gleich viel von 180°, nämlich AD ≡ AF, fehlt); so ist folglich der Sinus eines Bogens über 270°, (wie AHBhF,) = dem Sinus eines Bogens, (wie BHD) unter 180°, der so groß ist (wie BhF) als jener Bogen (AHBhF) über 180° beträgt.

Ueberdieß ist auch

$$\sin (180° + BhF) = \sin (360° - AF)$$

wie man leicht sieht.

2. Erklärung. 5. Zusatz.

... den Sinus ..... ausgenommen]

Weil

HC = sin 90° = dem Halbmesser

und auch

hC, der Sinus von 270°, = dem Halbmesser.

Denn HC ist von H, dem Endpuncte des Quadrantens AH, und hC von h, dem Endpuncte des Bogens ADHBh, (der = 3 . 90° = 270°,) das Loth auf dem durch den Anfangspunct A, gehenden Halbmesser AC, wie es die zwote Erklärung erfodert.

Sie . . . . . 360° ab]

Dieß alles erhellet aus dem 3. und 4. Zusatze.

Wenn der Bogen AD = Null ist, so ist der Sinus auch Null, in welchem Falle gleichsam D in A, und DC auf AC, liegt.

Erhebt sich nun D über A, und wächst also der Bogen AD von 0° bis 90°, so wächst auch zugleich DE, der Sinus des Bogens AD, von Null bis zu dem Halbmesser HC;

Von da nimmt er wieder ab, indem sein Bogen wächst, und wird fe (< HC) wenn aus AD der Bogen ADHf, worden ist, wo er dann weiter bis B in 180°, wächst, da der Sinus fe zugleich bis auf Null abnimmt;

Wenn der Bogen von B bis H, zu 270° = 3 . 90°, weiter wächst, nimmt der Sinus zugleich mit zu, bis er Ch = dem Halbmesser wird, wo er

wieder

wieder bis auf Null abnimmt, indem der Bogen zugleich von h bis 360°, wächst.

2. Erkl. 6. Zusatz. Anm.

Der Sinus von 360° ist Null; (5. Z.); Aber

$$\sin(360° + AD) = \sin AD$$
$$= \sin(2 \cdot 360° + AD) = \sin(3 \cdot 360° + AD)$$
$$= \sin(4 \cdot 360° + AD) \text{ ꝛc. [5. Zus.]}$$

2. Erklärung. 7. Zusatz.

Weil . . . . . (Ar. I. 90.)]

Die Lage der Sinus gegen einander bezieht man auf den gemeinschaftlichen Durchmesser AB, auf dem sie aufstehen; Man sieht welche Richtung sie von der Peripherie gegen den Durchmesser haben.

Die Sinus von 0° bis 180°, (z. E. DE, HC, fe) haben alle einerley Richtung; die von 180° bis 360° (z. E. de, hC, FE,) haben zwar unter sich gleiche, aber in Rücksicht der Sinus von 0° bis 180°, entgegengesezte, Richtung: diese fallen auf die Seite des Durchmessers nach h, jene aber auf die entgegengesezte, nach H.

Sind nun die Sinus zwischen 0° und 180° positiv, so sind die zwischen 180° und 360° negativ.

Eben . . . . . (Geom. 12. S. 14. Z.)]

Die Sinus wachsen von 0° bis 90°, nehmen von da bis 180°, wieder ab, wo sie = 0 werden oder verschwinden.

Da

Da nun die Verschwindung ein Uebergang in das Entgegengesezte ist; so kommen sie für Bogen über 180° wieder negativ zum Vorschein, wenn sie positiv verschwinden; wachsen negativ bis sie für 270°, = — Halbmesser werden, wo sie dann wieder negativ bis auf 0, für 360°, abnehmen.

3. Erklärung.

Von zween Bogen die zusammen 90° ausmachen, heißt der eine des andern **Ergänzung** zu 90°.

Wenn nun DH + AD = 90°; (Fig. I.) so ist DH des Bogens AD Ergänzung zu 90°, und umgekehrt.

Den Sinus des einen von diesen Bögen nennt man des andern Bogens **Cosinus**.

Fällt man daher von dem einen Endpuncte D, des Bogens DH (der mit AD, 90° ausmacht) auf den durch den andern Endpunct H gehenden Halbmesser CH das Loth DK; so ist dieses der Sinus von DH, aber der Cosinus von AD.

Die Bezeichnung des Cosinus, geschiehet durch Col. daher ist

DK = Col. AD.

Sind α und β zween Bogen die zusammen = 90°; so ist

sin. α = Col. β
sin. β = Col. α

3. Erklärung. 1. Zusatz.

Weil . . . . . des Sinus]

Da DK auf HC, und DE auf AC senkrecht stehet; so ist EK ein rechtwinklichtes Parallelogramm, und daher DK der Cosinus von AD = CE. (Geom. 12. S. 3. Z.)

Aber in dem rechtwinklichten Δ CED ist

$$ECq = CDq - DEq \text{ (Geom. 15. S.)}$$

Also:

$$DKq = CDq - DEq$$

Nun ist:

$$DK = Cos. AD;$$
$$CD = r, \text{ (dem Halbmesser)}$$
$$DE = \sin AD$$

Folglich

$$*) \; Cos\, AD^2 = r^2 - \sin AD^2$$

Mithin:

$$Cos. AD = \sqrt{(r^2 - \sin AD^2)}$$

Man findet also des Cosinus Quadrat, wenn man von dem Quadrate des Halbmessers das Quadrat des Sinus abzieht;

Zieht

*) Dieser Ausdruck bedeutet das Quadrat des Cosinus von dem Bogen AD, aber nicht der Cosinus von dem Quadrate des Bogens AD.

Dieß letztere würde man so ausdrücken:

$$Cos. (AD^2).$$

Dergleichen hat man bey ähnlichen in der Folge vorkommenden Ausdrücken zu merken.

Zieht man aus dieser Differenz die Quadratwurzel, so hat man den Cosinus selbsten.

3. Erklärung. 1. Zusatz. Exempel.

Cosin 30° oder sin 60° = $\sqrt{(r^2 - (\sin 30°)^2)}$

Aber

$\sin 30° = \frac{1}{2} r$

Folglich

$(\sin 30°)^2 = \frac{1}{4} r^2$

Also:

$\sin 60°$ oder $\text{Cos } 30° = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)}$
$= 2c.$ (S. Buch.)

3. Erklärung. 2. Zusatz.

Cos. Af ..... (Ar. I. 90.)]

Es sey

$fB = AD;$

Also

$fH = DH;$

So ist des Bogens Bf Cosinus das Loth, das man von f auf HC fällte. (3. Erkl.)

Aber dieses Loth ist gleich Ce (Geom. 12. S. 3. Z.): Also

Cos. Bf = Ce.

Nun ist fe der Sinus von ADHf und

$Ceq = r^2 - feq$ (1. Z.)
$= r^2 - (\sin. ADHf)^2$
$= \text{Cos. } ADHf^2$

Also

$Ce = \text{Cos. } ADHf$

Da nun

$$fe = DE \text{ (2. Erkl. 2. Z.)}$$

so ist

$$r^2 - feq = r^2 - DEq$$
$$= Ceq$$
$$= ECq$$

Folglich Ce der Größe nach dem CE gleich;

Aber CE liegt auf der entgegengesezten Seite, von CH, in Rücksicht CE, d. h. die Richtung von CE ist von C nach E zu, da hingegen Ce seine Richtung auf die entgegengesezte Seite, von C nach e, nimmt.

Also ist, wenn jene Richtung positiv angenommen wird,

$$Ce = -CE \text{ (Ar. I. 90.)};$$

Folglich:

$$Cos.\ ADHf = Ce$$
$$= -CE;$$

Also auch:

$$Cos\ ADHf = -Cos.\ AD.$$

3. Erklärung. 4. Zusatz.

Folglich ..... ist]

Der Bogen AD (Fig. I.) so wohl als AF sind kleiner als 90°;

Ist nun AD positiv; so ist AF negativ:

Den bejahten Bogen AD kommt der Sinus DE zu, und dieser ist auch bejaht;

Der verneinte Bogen AF, hingegen, hat zum Sinus FE, und dieser ist verneint (2. Erkl. 8. Z.).

Also ..... bejahten]

CE ist sowohl des Bogens AD, als auch des Bogens AF, Cosinus.

Dieser ist bejaht (3. Z.).

Daher hat nicht nur der bejahte Bogen AD einen positiven Cosinus, sondern auch der verneinte AF, wenn nämlich beyde $< 90°$.

... so hat wiederum ..... verneinten]

Des Bogens AHf Sinus ist fe und des Bogens Ahd Sinus, de;

Jener, (fe), ist positiv, dieser, (de), negativ. (2. Erkl. 8. Z.)

Also hat der bejahte Bogen AHf einen bejahten Sinus fe, und der verneinte Bogen Ahd einen verneinten Sinus de.

Ueberhaupt ..... verneint ist]

So war des verneinten Bogens AF Cosinus, EC, und einerley mit des bejahten Bogens AD seinen;

Der Cosinus des positiven Bogens AHf ist Ce, und eben dieser Cosinus kommt auch dem verneinten Bogen Ahd zu.

CE, der Cosinus von AD, ist bejaht; also ist er es auch für den verneinten Bogen AF;

Ce, der Cosinus von AHf, ist negativ, und also auch für den verneinten Bogen Ahd.

Auf eben die Art erhellet, daß des positiven Bogens ADHBd (> 180°), Cosinus Ce, [der verneint ist (z. B.)] auch dem negativen Bogen AhBk zugehöre, und der bejahte Bogen AHBhF mit dem verneinten Bogen AFhBHD einerley positiven Cosinus EC habe.

. . . . auch bald . . . . . verhält]

Aus dem gleich vorhergehenden ist bekannt, daß der bejahte Bogen zwischen 0° und 180° einen bejahten Sinus, hingegen der verneinte Bogen zwischen 0° und 180° einen verneinten Sinus, hat.

Wenn nun der positive Bogen ADHBd > 180°; so hat er einen negativen Sinus de, aber der so verneinte Bogen AhdBf einen positiven Sinus fe.

Eben so kommt dem positiven Bogen AHBhF > 270° ein verneinter Sinus, FE, zu, wie dem negativen Bogen AhBHD ein positiver Sinus DE. (2. Erkl. 8. B.)

4. Erklärung.

Man ziehe durch den Anfangspunct A des Bogens AD (Fig. I.) eine geometrische Tangente gG (Geom. 19. S. 1. B.);

Durch seinen Endpunct D aber, den Halbmesser CD, welcher verlängert Gg in G schneiden wird;

Die dadurch bestimmte Linie AG heißt die **Tangente** des Bogens AD und CG; der bis G verlängerte Halbmesser, seine **Sekante**.

Der Unterschied zwischen dieser **trigonometrischen Tangente** AG und der geometrischen ist:

Daß jene durch A und den Durchschnittspunct G mit dem verlängerten durch des Bogens Endpunct D gefundenen Halbmesser CD, bestimmt wird; diese aber an A eine unbestimmte gerade Linie ist.

Von solchen Tangenten, wie AG, ist in der Trigonometrie die Rede.

Die geometrische Sekande ist jede den Kreis schneidende Linie; die trigonometrische hingegen, wie CG, ist allemal der durch des Bogens Endpunct gehende verlängerte Halbmesser, bestimmt durch dieses Bogens Tangente;

Und auch nur von solchen macht die Trigonometrie Gebrauch.

Der Tangente Zeichen ist Tang., oder Tg. auch oft nur T oder t; der Sekante ihres, Sec.

Daher drückt sich AG durch

Tang. AD, oder Tg. AD ꝛc.

und CG durch

Sec. AD

aus.

4. Erklärung. Exempel.

Wenn

$$AD = 45°;$$

so ist

$$AG = Tg.\ 45°,$$

und in dem rechtwinklichen Δ GAC der Winkel $ACG = 45°$, (Geom. 22. S.) folglich auch so groß der W. AGC (Geom. 13. S. 2. Z.) Also

$$AG = CA$$
$$= r \text{ (dem Halbmesser)}$$

Folglich:

$$Tg.\ 45° = r.$$

Bey eben der Voraussetzung ist

$$GC = sec.\ 45°$$

Aber

$$GCq = AGq + ACq$$
$$= Tg.\ 45^2 + r^2$$
$$= r^2 + r^2$$
$$= 2\,r^2$$

folglich:

$$GC = \sqrt{2\,r^2}$$

oder:

$$sec.\ 45° = \sqrt{2\,r^2}$$

der Sin. von 45° war $= \frac{1}{2}\sqrt{2\,r^2}$ (2. Erkl. 1. Z. Ex.)

Also, ist die Sekante von 45° doppelt so groß als der Sinus von 45°, wenn beyde zu genannte Bogen gehören, die mit einerley Halbmesser beschrieben sind.

4. Erklärung. 1. Zusatz.

Es sey

$$Bf = AD;$$

so ist die Tangente des Bogens ADf (> 90°) der von den Halbmessern CA, Cf begränzt wird,

$$= Ag = - AG.$$

Denn an dieses Bogens Anfangspunct A eine berührende Linie Gg gezogen (Geom. 19. S. 1. B.) und solche von dem verlängerten Halbmesser Cf durchschnitten, (welches hier nicht anders als in g geschehen kann, indem Cf rückwärts nach F zu verlängert wird,) bestimmt Ag als die Tangente des Bogens ADf.

Nun ist aber, (weil $Bf = AD$ angenommen,) der Winkel

$$DCA = fCB \text{ (Geom. 22. S.)}$$

überdieß

$$W. fCB = ACg \text{ (Geom. 8. S. 4. B.)}$$

folglich

$$GCA = ACg.$$

Ferner:

$$GAC = CAg \text{ (denn jeder} = R)$$
$$CA = CA$$

Also:

$$\Delta CAG = \Delta CAg$$

Mithin sind AG und Ag der Größe nach gleich.

Aber Ag hat von A weg eine Lage die der Lage der AG entgegengesezt ist.

Ist daher AG positiv; so ist Ag negativ: Folglich:

$$\text{Tang. } ADf = Ag,$$
$$= -AG$$

Da nun

$$AG = Tg\ AD;$$

so ist auch

$$Tang\ ADf = -Tg\ AD.$$

Weil aber

$$ADf + fB = DfB + AD$$
$$fB = AD$$

---

so ist

$$ADf = DfB$$

Also

$$Tang\ ADf = Tang\ DfB$$
$$= Tang\ AD.$$

Oder: die Tangente eines Bogens über 90° ist der Tangente des Bogens der mit jenem 180° ausmacht, gleich, aber entgegengesezt.

Auf ähnliche Art ergiebt sich

$$Tg\ ADfd = Tg\ AD$$
$$= Tg\ (180° + Bd)$$

(wo $Bd = AD$ seyn soll); und

$$Tg.\ ADfdF = -Tang\ AD$$
$$= Tg\ (360° - AF)$$ [wo $AF = AD$ angen.]
$$= Tg\ (270° + hF);$$

wie Anfänger leicht dieses und das übrige gegenwärtigen Zusazes begreifen werden.

4. Erklärung. 3. Zusatz.

Wenn

$$AD = x;$$

so ist

$$CE = \text{Cof. } x;$$
$$DE = \text{sin } x;$$
$$AG = \text{Tang } x$$

überdieß

$$CA = \text{dem Halbmesser} = r;$$

Da nun der

W. EDC = AGC (Geom. 12. S. 2. Z.)
DEC = GAC (denn jeder = R.
DCE = GCA (Ar. I. 87.)

---

so ist

$$\Delta CED \sim \Delta CAG;$$

Also

$$CE : ED = CA : AG \text{ (Geom. 26. S.)}$$

und, für diese Größen, die ihnen gleichen gesezt, giebt

$$\text{Cof } x : \text{sin } x = r : \text{tang } x$$

oder ꝛc. (S. Buch.)

4. Erklärung. 4. Zusatz.

Auch ..... 2. Zus.]

Wenn

$$x < 90°;$$

so ist sin x und Cof x positiv; daher auch

$$\text{tang } x = \frac{r \cdot \text{sin } x}{\text{Cof } x};$$

Ist

$$x = 90°;$$

so hat man

$$\text{sin } x = r \text{ und Cof } x = 0$$

daher

daher

$$\text{Tg } x = \frac{r \cdot r}{o} = \infty$$

Daß

$$\frac{r \cdot r}{o} = \infty$$

ersieht man unter andern daraus:

Je kleiner der Divisor wird, je größer wird der Quotiente. Z. E.

$8 : 4 = 2;$
$8 : 2$ aber $= 4$

und

$4 > 2;$

Ferner

$8 : 1 = 8;$
$8 : \frac{1}{2} = 16;$
$8 : \frac{1}{4} = 32;$
$8 : \frac{1}{8} = 64;$ &c.

also: desto kleiner der Divisor, desto größer der Quotiente:

Folglich, wenn der Divisor kleiner ist als jede Größe die sich angeben läßt, d. h. **unendlich klein**; so muß der Quotiente größer als alle angebliche Größen, d. h. **unendlich groß**, seyn. —

Für

$x > 90°$ aber $< 180°$

ist sin x positiv, Cos. x aber negativ: daher wird Tg x verneinend, oder

— Tg

$$-\mathrm{Tg}\,x = \frac{r \cdot \sin x}{-\mathrm{Cos}\,x}$$

Da $x = 90°$ war, war $\mathrm{Tg}\,x$ unendlich groß, izt, da x zwischen $90°$ und $180°$ fällt, ist die Tangente von x wieder endlich, aber verneinend:

Die Tangenten nehmen also im 2ten Quadranten negativ ab.

Für

$$x = 180°$$

ist

$$\sin x = 0,$$
$$\mathrm{Cos}\,x = -r;$$

Also die

Tangente von $180° = 0$;

oder

$$\mathrm{Tang.}\ 180° = \frac{r \cdot 0}{-r} = 0$$

Fällt x zwischen $180°$ und $270°$ so ist $\sin x$ sowohl als $\mathrm{Cos}\,x$ negativ, und die Tangente von x positiv, oder

$$\mathrm{Tang}\,x = \frac{r \times -\sin x}{-\mathrm{Cos}\,x}$$

$$= \frac{r \cdot \sin x}{\mathrm{Cos}\,x}$$

Da $x = 180°$ war, war $\mathrm{Tg}\,x = 0$; izt aber, für $x > 180°$ und $< 270°$ ist sie größer als Null.

Die Tangenten wachsen also im 3ten Quadranten mit ihren Bogen, bejahend.

Ist

Ist

$$x = 270°;$$

so ist

$$\text{Tang } x = \frac{-r \cdot r}{0} = \infty$$

und für x zwischen 270° und 360° hat man

$$-\text{Tg } x = \frac{r \cdot -\sin x}{\text{Cos. } x}$$

$$= -\frac{r \cdot \sin x}{\text{Cos. } x}$$

Auch für $x = 360°$

$$\text{Tg } x = \frac{r \cdot 0}{r} = 0$$

4. Erklärung. 5. Zusatz.

Es ist also

$$\text{sec } x = \frac{r^2}{\text{Cos } x},$$

Aus dieser Formel ergeben sich, auf ähnliche Art wie vorher bey der Tangente, die Beschaffenheiten der Sekante in den verschiedenen Quadranten.

Nämlich: Für

$x < 90°$ bleibt

$$\text{sec } x = \frac{r^2}{\text{Cos } x};$$

$x = 90°$,

$$\text{sec } x = \frac{r^2}{0}$$

$$= \infty;$$

$x > 90° < 180°,$

$$-\sec x = \frac{r^2}{-\operatorname{Cof} x}$$

$$= -\frac{r^2}{\operatorname{Cof} x},$$

$x = 180°$

$$\sec x = \frac{r^2}{-r}$$

$$= -r,$$

$x > 180° < 270°$

$$-\sec x = \frac{r^2}{-\operatorname{Cof} x}$$

$$= -\frac{r^2}{\operatorname{Cof} x}$$

$x = 270°$

$$\sec x = \frac{r^2}{0}$$

$$= \infty$$

$x > 270° < 360°$

$$\sec x = \frac{r^2}{\operatorname{Cof} x}$$

$x = 360°$

$$\sec x = \frac{r^2}{r}$$

$$= r$$

Man sieht hieraus:

Daß

Daß die Sekanten im ersten und 4ten Quadranten positiv, im 2ten und 3ten aber, negativ, sind;

Daß sie im ersten Quadranten mit ihren Bogen wachsen, bis Sec. $90^\circ = \infty$;

Im 2ten, bey wachsenden Bogen negativ abnehmen, bis für 180°, Sek. $= -r$ wird.

Im 3ten Quadranten die negativen Sekanten wieder mit ihren Bogen wachsen, bis für 270° Sekante $= \infty$ wird; Und im 4ten Quadranten wieder bejahend mit wachsenden Bogen bis auf Sekante von 360°, $= r$ abnehmen.

Eben dieses ergiebt sich auch, wenn man bey den Sekanten eine ähnliche Betrachtung wie bey den Tangenten im 1. und 2. Zusatze anstellt, welche, weil sie leicht ist, ich Anfängern zur Uebung überlasse.

Also ..... gegeben]

$$\text{Tg } x = \frac{r \cdot \sin x}{\text{Cos } x}$$

Aber

$$\text{Cos } x = \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}$$

Folglich:

$$\text{Tg } x = \frac{r \cdot \sin x}{\sqrt{(r^2 - \sin x^2)}};$$

Ferner:

$$\text{Sec } x = \frac{r^2}{\text{Cos } x}$$

Also

Also

$$= \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - \sin x^2)}}$$

Auch ist Sec x = ...]

Denn

Sec x oder CG = $\sqrt{(ACq + AGq)}$ (G. 15. S.)

5. Erklärung.

Von zween Bogen, AK, KH, die zusammen 90° ausmachen, ist des einen Bogens KH Tangente HK und Sekante, CK, des andern, AK seine **Cotangente, und Cosekante.**

So ist auch des Bogens AH (Fig. 2.) Tangente AG, des Bogens KH, Cotangente, und jenen seine Sekante CG, diesen seine Cosekante.

Das Zeichen der Cotangenten ist: Cot. und der Cosekanten: Cosec.

Daher wird man verstehen, was

KH = Cot AD
CK = Cosec AD

heißt.

Sind α und β zween Bogen, die zusammen 90° betragen, so begreift man, daß

Cot α = Tang β
Cot β = Tang α
Cosec α = Sec β
Cosec β = Sec α

5. Erklärung. 1. Zusatz.

Weil ..... Cosec x]

Da GA und HC parallel sind, (indem sie auf AC senkrecht stehen, [Geom. 11. S.]); so erhellet die Gleichheit dieser Winkel aus Geometrie 12. Satzes 2. Zusatze.

Die Proportionen aber aus Geom. 26. S.

Wenn man nun AD = x (wie im 3. Zus. der 3. Erkl.) sezt; so ist

$$AG = \text{Tang } x,$$

$$CA = r$$ (dem Halbmesser, welcher hier in der Trigonometrie allemal so bezeichnet wird)

$$CH = r,$$

$$KH = \text{Cot } x;$$

Ferner

$$ED = \sin x,$$

$$CD = r$$

$$= CH,$$

$$CK = \text{Cosec } x;$$

Und aus der Proportion

$$AG : CA = CH : HK$$

wird die:

$$1)\ \text{Tg } x : r = r : \text{Cot } x$$

aber aus der,

$$ED : CD = CH : CK$$

die

$$2)\ \sin x : r = r : \text{Cosec } x$$

Also: aus 1)

$$\text{Cot } x = \frac{r^2}{\text{Tg } x}$$

(woraus

(woraus auch folgt, daß

$$\text{Cot } x = \frac{r^2}{\frac{r \cdot \sin x}{\text{Cof } x}} = \frac{r^2 \text{ Cof } x}{r \cdot \sin x} = \frac{r \cdot \text{Cof } x}{\sin x}\text{)};$$

aus 2)

$$\text{Cofec } x = \frac{r^2}{\sin x}$$

Daß ..... sind]

Die Cosekante ist vermöge der Formel $\frac{r^2}{\sin x}$ unmittelbar durch den Sinus gegeben; aber die Cotangente, mittelst der Formel $\frac{r^2}{\text{tg } x}$ durch die Tangente, welche Formel sich leicht durchden Sinus ausdrücken läßt.

Nämlich

$$\text{tg } x = \frac{r \sin x}{\sqrt{(r^2 - \sin x^2)}};$$

Folglich

$$\text{Cot } x = \frac{\frac{r^2}{r \sin x}}{\sqrt{(r - \sin 2^2)}}$$

$$= \frac{r^2 \cdot \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}}{r \cdot \sin x}$$

$$= \frac{r \cdot \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}}{\sin x}$$

Aus der 3. Erkl. 1. Z.; 4. Erkl. 5. Zuf.; und diesem Zusatz, erhellet, wie Cosinus, Quersinus, Tangente, Cotangente, Sekante, Cosekante, (welche mit dem Sinus, den gemeinschaftlichen Namen: **trigonometrische Linien**, führen) durch den Sinus ausgedruckt werden können.

Ueberhaupt kann man aus jeder trigonometrischen Linie mittelst des Halbmessers, die übrigen finden.

Hiervon aber lese man des Herrn Prof. Funks 1770 zu Leipzig gehaltenen Disputation:

Methodus ex data linea trigonometrica angulum definiente inveniendi reliquas;

Auch den 3. und 4. der Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Mathematik.

5. Erklärung. 2. Zusatz.

Für einen andern Bogen oder auch Winkel, y, ist

$$\text{Cot } y = \frac{r^2}{\text{tang } y},$$

wie aus dem vorigen Zusatze erhellet, wo man nur Cot x und tg x in Cot y und tg y umsetzen darf.

Aber

Aber die Cotangenten von x und y (so wie alle Größen, verhalten sich wie ihre Werthe, d. h.

$$\text{Cot } x : \text{Cot } y = \frac{r^2}{\text{tg } x} : \frac{r^2}{\text{tg } y},$$

Und weil sich Brüche, von einerley Zähler, umgekehrt, wie ihre Nenner verhalten; so ist

$$\frac{r^2}{\text{tg } x} : \frac{r^2}{\text{tg } y} = \text{tg } y : \text{tg } x$$

Also:

$$\text{Cot } x : \text{Cot } y = \text{tang } y : \text{tang } x$$

5. Erklärung. 3. Zusatz.

Aus der Proportion vorigen Zusatzes erhellet, daß wenn die Tangenten positiv oder negativ sind, auch die Cotangenten positiv oder negativ seyn müssen.

Nun sind (verm. 4. Erkl. 1. Z.) die Tangenten im ersten und dritten Quadranten bejahend;

Also müssen es auch da die Cotangenten seyn;

Im 2ten und 4ten Quadranten hingegen sind die Tangenten verneinend;

Also auch da die Cotangenten.

Wenn

$$x = 0°;$$

so ist

$$\text{Cot } x = \frac{r^2}{\text{tg } x} \text{ (1. Z.)}$$

$$= \frac{r^2}{0}$$

$$= \infty \text{ (4. Erkl. 4. Z.)}$$

Für $x = 90°$ ist

$$\text{Cot } 90° = \frac{r^2}{\text{Tg } 90°}$$

$$= \frac{r^2}{\infty}$$

$$= 0$$

Nämlich eine endliche Größe, durch eine unendlich große dividirt, giebt zum Quotienten Null; d. h. indem der Divisor wächst und größer als jede Größe die sich angeben läßt, wird, nimmt der Quotiente ab, und wird kleiner als jede angebliche Größe, d. h. **unendlich klein**; oder er verschwindet.

Man sehe unsers Herrn Autors An. des Unendlichen §. 5, 6; überdieß Herrn Hofr. Karstens Beyträge zur Mathem. 41 u. f. S.; auch dessen Lehrbegr. der Mathem. II. Th. 29. §. der A. R.)

Daß für

$$x = 90°,$$

die Cot. $= 0$ ist, erhellet auch aus der Formel:

$$\text{Cot } x = \frac{r \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}}{\sin x}$$ (1. Z. und d. E.)

Denn

Denn in diesem Falle ist

$$\text{Cot } x = \frac{r \cdot \sqrt{(r^2 - \sin 90^{\circ 2})}}{\sin 90^\circ}$$

$$= \frac{r\sqrt{(r^2 - r^2)}}{\sin 90^\circ}$$

$$= \frac{0}{\sin 90^\circ}$$

$$= 0$$

Für

$x = 180^\circ$

ist

$$\text{Cot } 180^\circ = \frac{r^2}{\text{tg } 180^\circ}$$

$$= \frac{r^2}{0} \text{ (4. Erkl. 2. 3.)}$$

$$= \infty;$$

$x = 270^\circ,$

$$\text{Cot } 270^\circ = \frac{r^2}{\text{tg } 270^\circ}$$

$$= \frac{r^2}{\infty}$$

$$= 0;$$

$x = 360^\circ$

$$\text{Cot } 360^\circ = \frac{r^2}{\text{Tg } 360^\circ}$$

$$= \frac{r^2}{0} \text{ (4. Erkl. 2. 3.)}$$

$$= \infty$$

Die Cotangenten nehmen also im ersten Quadranten ab, indem ihre Bogen wachsen, bis sie für 90°, Null werden;

Dann wachsen sie für Bogen über 180° negativ bis Cot. 180° = ∞;

Von da nehmen sie wieder positiv ab, indem ihre Bogen zunehmen, bis Cot 270° = 0, wo sie alsdenn für Bogen über 270° wieder negativ zum Vorschein kommen, und für 360° unendlich werden.

Aus

$$\frac{r^2}{\sin x} = \text{Cosec } x,$$

wie auch aus der Proportion:

$$\text{Cosec } x : \text{Cosec } y = \frac{r^2}{\sin x} : \frac{r^2}{\sin y}$$
$$= \sin y : \sin x$$

erhellet, daß wenn die Sinus positiv oder negativ sind, es auch die Cosekanten seyn müssen;

Daher sind die Cosekanten in den ersten beyden Quadranten bejaht, in den beyden andern aber verneint.

Auch ergiebt sich aus $\frac{r^2}{\sin x}$, daß

Cosec 90° = r
Cosec 180° = ∞
Cosec 270° = − r
Cosec 360° = ∞, wie für 0°.

Hieraus

Hieraus sieht man:

Die Cosekante ist für 0° unendlich;

Sie nimmt für Bogen < 90 positiv ab, bis Cosec 90° = r wird;

Von da nimmt sie, indem die Bogen immer > 90° werden, wieder positiv zu, bis für Cosec 180° = ∞.

Für Bogen über 180° nimmt sie negativ ab, bis Cosec 270° = — r, da sie dann wieder negativ bis Cosec 360° = ∞, wächst.

Alles dieses veroffenbaret sich auch, wenn man bey den Cotangenten und Cosekanten, ähnliche Betrachtungen, wie bey den Tangenten ꝛc. (4. Erkl. 1, 2. Z.) anstellt.

Anmerkung wegen des Quersinus.

Der Quersinus (AE) eines Bogens (AD, Fig. I.) ist, wie aus der 3. Erkl. 1. Zusatz bekannt, der Unterschied zwischen dem Halbmesser (CA) und dem Cosinus (CE).

Er ist allemal der Höhe seines doppelten Bogens (FAD) gleich, wenn diese Höhe, das Loth von der Mitte dieses Bogens FAD, auf seine Sehne FD ist.

Man bezeichnet den Quersinus durch sinv. oder blos sv.

Für den Bogen x ist

$$\text{finv. } x = r - \text{Cof } x$$
$$= r - \sqrt{(r^2 - \text{fin } x^2)}$$

Wenn

$x = 0°$; ſo iſt

$$\text{finv. } 0° = r - \text{Cof } 0°$$
$$= r - r \text{ (3. Erkl. 3. Z.)}$$
$$= 0$$

Für x zwiſchen $0°$ und $90°$ iſt allemal

$$\text{finv} = r - \text{Cof } x,$$

alſo poſitiv, und $< r$

Aber für

$$x = 90°$$

iſt

$$\text{finv } 90° = r - \text{Cof } 90°$$
$$= r - 0 \text{ (3. Erkl. 3. Zuſ.)}$$
$$= r;$$

Alſo wachſen die Querſinus der Bogen unter $90°$, bejahend, indem ihre Bogen wachſen, und werden für Bogen von $90°$, $= r$.

Wenn

$x > 90°$ und $< 180°$;

ſo iſt der Coſinus verneinend; daher für ſolche x allemal

$$\text{finv. } x = r - (-\text{Cof } x) \text{ [3. Erkl. 2. Z.]}$$
$$= r + \text{Cof } x \text{ (Ar. I. 98.)}$$

Iſt

$$x = 180°;$$

ſo hat man

$$\text{finv. } 180° = r - (-r) \text{ [3. Erkl. 3. Z.]}$$
$$= 2r \text{ (Ar. a. a. O.)}$$

Die

Die Quersinus nehmen also für Bogen über 90° immer positiv zu, bis sie für 180°, = 2 r werden. Für

x zwischen 180° und 270°

ist der Quersinus wieder

$= r + \text{Cof } x$

also kleiner als 2 r, weil $\text{Cof } x < r$; (3. Erkl. 3. Z.) und für

$x = 270°$

ist

$\text{sinv } 270° = r + 0$ (3. Erkl. 3. Z.)

$= r$

Fällt x zwischen 270° und 360°; so ist dafür allemal

$\text{sinv. } x = r - (+ \text{Cof } x)$

$= r - \text{Cof } x$

also kleiner als r, und wenn $x = 360°$ wird, so wird der Quersinus = 0.

Die Quersinus nehmen also für Bogen über 180° wieder positiv ab, werden für 270°, = r, von da sie immer kleiner und kleiner werden, indem ihre Bogen wachsen, bis sinv. 360° = 0.

Die Quersinus sind also in allen 4 Quadranten bejaht. —

Von zween Bogen, die zusammen 90° betragen, heißt des einen Bogens Quersinus, des andern sein **Coquersinus.** (sinus versus complementi)

Seyen

Seyen (Fig. I.) AD und DH solche Bogen; so ist des Bogens DH Quersinus HK, des Bogens AD Coquersinus.

Wir können ihn durch Cqs. oder Cqsin bezeichnen, und also, z. E. HK, durch

Cqs AD, oder Cqsin AD

ausdrücken.

Da

$$HK = CH - CK;$$

so ist

$$Cqsin\ AD = r - sin\ AD$$

Folglich, wenn AD, x heißt

$$Cqsin\ x = r - sin\ x.$$

Sein Verhalten in den verschiedenen Quadranten, wird man, wenn man es zu wissen braucht, leicht finden.

Kurze Uebersicht in so ferne verschiedenen Bogen einerley gleichgroße, obwohl in Rücksicht der Lage unterschiedene trigonometrische Linien zukommen.

Es sey

α ein Bogen $< 90°$;

so ist

1) $$\left.\begin{aligned} sin\ \alpha &= \quad sin\ (180° - \alpha) \\ &= -sin\ (180° + \alpha) \\ &= -sin\ (360° - \alpha) \end{aligned}\right\}$$ (2. Erkl. 7. B.)

2) $$\left.\begin{aligned} Cos\ \alpha &= -Cos\ (180° - \alpha) \\ &= -Cos\ (180° + \alpha) \\ &= \quad Cos\ (360° - \alpha) \end{aligned}\right\}$$ (3. Erkl. 2. B.)

3) Tang

3) $\text{Tang}\,\alpha = -\text{Tang}(180° - \alpha)$
$= \text{Tang}(180° + \alpha)$ (4. Erkl. 1. 3.)
$= -\text{Tang}(360° - \alpha)$

4) $\text{Cot}\,\alpha = -\text{Cot}(180° - \alpha)$
$= \text{Cot}(180° + \alpha)$ (5. Erkl. 1. 3.)
$= -\text{Cot}(360° - \alpha)$

5) $\text{sec}\,\alpha = -\text{sec}(180° - \alpha)$
$= -\text{sec}(180° + \alpha)$ (4. Erkl. 5. 3.)
$= \text{sec}(360° - \alpha)$

6) $\text{Cosec}\,\alpha = \text{Cosec}(180° - \alpha)$
$= -\text{Cosec}(180° + \alpha)$ (5. Erk. 1. 3.)
$= -\text{Cosec}(360° - \alpha)$

7) $\text{sinv}\,\alpha = \text{sinv}(360° - \alpha)$
$\text{sinv}(180° - \alpha) = \text{sinv}(180° + \alpha)$ (3. E. 13.)

8) $\text{Coqsin}\,\alpha = \text{Coqsin}(180° - \alpha)$
$\text{Coqsin}(180° + \alpha) = \text{Coqsin}(360° - \alpha)$

Darstellung der in den Erklärungen (2, 3, 4, 5) gefundenen einfachen trigonometrischen Formeln.

1) $\sin x = \sqrt{(r^2 - \text{Cosin}\,x^2)}$

2) $\text{Cosin}\,x = \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}$

3) $\text{tang}\,x = \dfrac{r \,.\, \sin x}{\text{Cosin}\,x}$

4) $\text{Cotang}\,x = \dfrac{r \,.\, \text{Cosin}\,x}{\sin x} = \dfrac{r^2}{\text{tang}\,x}$

5) sec

5) $\text{sec } x = \frac{r^2}{\text{Cosin } x} = \sqrt{(r^2 + \text{tg } x^2)}$

6) $\text{Cosec } x = \frac{r^2}{\text{sin } x} = \sqrt{(r^2 + \text{Cot } x^2)}$

Sezt man $r = 1$, wie in der Folge oft vorkommen wird, so hat man dafür

1) $\text{sin } x = \sqrt{(1 - \text{Cosin } x^2)}$

2) $\text{Cosin } x = \sqrt{(1 - \text{sin } x^2)}$

2) $\text{tg } x = \frac{\text{sin } x}{\text{Cos. } x}$

4) $\text{Cot. } x = \frac{\text{Cos } x}{\text{sin } x} = \frac{1}{\text{tg } x}$

5) $\text{sec } x = \frac{1}{\text{Cos } x} = \sqrt{(1 + \text{tg } x^2)}$

6) $\text{Cosec } x = \frac{1}{\text{sin } x} = \sqrt{(1 + \text{Cot } x^2)}$

1. Satz.

Bedingung. Aus der Spitze eines Winkels ACD sey innerhalb seinen Schenkeln mit dem Halbmesser $CA = r$ der Bogen AD, und mit dem Halbmesser $C\alpha = R$ der Bogen $\alpha\delta$ beschrieben und jener bis η dieser bis H verlängert, so daß $\delta\eta$ des B. $\alpha\delta$ und DH des B. AD Ergänzung zu 90° ist;

So werden die Bogen $\alpha\delta$ und

AD,

AD, als auch $\delta\eta$ und DH ähnlich seyn. (Geom. 22. S. 6. Z.)

Behauptung.

und

$r : R = \sin AD : \sin \alpha\delta$
$= \text{Cos } AD : \text{Cos } \alpha\delta$
$= \text{Tang } AD : \text{Tang } \alpha\delta$
$= \sec AD : \sec \alpha\delta$
$= \text{Cot } AD : \text{Cot } \alpha\delta$
$= \text{Cosec } AD : \text{Cosec } \alpha\delta$

Vorbereitung.

Man ziehe

$\delta\varepsilon$ den Sinus des Bogens $\alpha\delta$
DE " = = " AD;
$C\varepsilon$ den Cosinus = " $\alpha\delta$
CE " = " = AD;
$\alpha\gamma$ die Tangente " = $\alpha\delta$
AG " = " " AD;
$C\gamma$ die Sekante " = $\alpha\delta$
CG = " " = AD;
$\eta\varkappa$ die Cotang. = " $\alpha\delta$
HK = " = " AD;
$C\varkappa$ die Cosekante = = $\alpha\delta$
CK " = = " AD;

Beweis.

So ist in den Dreyecken DEC, $\delta\varepsilon C$ der Winkel

$C = C$
$EDC = \varepsilon\delta C$
$DEC = \delta\varepsilon C$

und

und daher

$$CK(=r) : C\delta(=R) = DE(=\sin AD) : \delta\varepsilon$$
$$(=\sin \alpha\delta) \text{ (Geom. 26. S.)}$$
$$= CE\ (=\mathrm{Col}\ AD):$$
$$C\varepsilon\ (=\mathrm{Col}\ \alpha\delta \text{ (Geom. 26. S.)}$$

Ferner ist in den Dreyecken GAC, $\gamma\alpha C$ der Winkel

$$C = C$$
$$GAC = \gamma\alpha C$$
$$AGC = \alpha\gamma C$$

Folglich vermöge Geom. 26. S.

$$CA\ (=r) : C\alpha\ (=R) = AG\ (=\mathrm{tg}\ AD) :$$
$$\alpha\gamma\ (=\mathrm{tg}\ \alpha\delta)$$
$$= CG\ (=\sec AD) : C\gamma\ (=\sec \alpha\delta)$$

Auch sind die Dreyecke CKH und $C\varkappa\eta$ ähnlich; und folglich

$$CH(=r) : C\eta\ (=R) = HK\ (=\mathrm{Cot}\ AD):$$
$$\eta\varkappa\ (=\mathrm{Cot}\ \alpha\delta)$$
$$= CK\ (=\mathrm{Cosec}\ AD) : C\varkappa\ (=\mathrm{Cosec}\ \alpha\delta)$$

Alles dieses gilt auch für Bögen $> 90° > 180° > 270°$, weil solche Bögen mit ihren Ergänzungen zu 180°, und 360°, und mit ihren Ueberschüssen über 180°, gleichgroße Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, Sekanten, Cosekanten, haben. Da

$$CA : C\alpha = CE : C\varepsilon$$

so ist auch

$$CA - CE : C\alpha - C\varepsilon = CA : C\alpha$$

d. i.

$$AE : \alpha\varepsilon = CA : C\alpha$$

d. h.

$$\text{sinv } AD : \text{sinv } \alpha\delta = r : R.$$

Eben so ergiebt sich, daß

$$\text{Coqsin } AD : \text{Coqsin } \alpha\delta = r : R.$$

Diese beyden Proportionen gelten ebenfalls allemal, was auch AD und $\alpha\delta$ für Bogen seyn mögen; wie man leicht sieht.

2. Satz. 1. Anmerkung.

Die Auflösung einer sehr großen Menge Aufgaben, kommt, wie die Folge zeigen wird, darauf an, daß man aus dem in Graden gegebenen Winkel, oder Bogen, für einen bestimmten Halbmesser eine oder mehrere trigonometrische Linien, anzugeben weiß, oder umgekehrt: aus einer trigonometrischen Linie eines mit einem bekannten Halbmesser beschriebenen Bogens, finden kann, wie viel Grade dieser Bogen oder der ihm zugehörige Winkel, enthalte:

Daher war es nöthig auf Mittel zu denken, wie man dieß alsbald und ohne weitläuftige Rechnung bewerkstelligen könne.

Deshalb berechnete man für einen angenommenen Halbmesser diese Linien; und zwar erste die Sinus und Tangenten für Bögen die Vielfache einer Minute sind, hernach aber von 10 zu 10 Sekunden nicht nur die Sinus und Tangenten, sondern auch die Sekanten und Quersinus.

Um nun Anfängern die Möglichkeit zu zeigen, wie diese Linien für einen beliebigen Halbmesser, haben berechnet werden können, dient folgendes:

I) Wenn man den Halbmesser in 10000000 Theile theilt, so müssen diese Linien eine Menge solcher Theile, enthalten; oder, welches eben das, eine Zahl solcher Theile werden. (1. S. 2. Z.)

Für diesen Halbmesser nun, ist

$$\sin 30^\circ = \frac{10000000}{2}$$

$$= 5000000 \text{ (2. Erkl. 1. Z.)}$$

und

$$\text{Cos } 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3 \cdot 10000000^2}}{2}$$

(3. Erkl. 1. Z.)

$$= \frac{10000000 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$= 5000000 \cdot \sqrt{3}$$

$$= 5000000 . 1,7320508$$

(Ar. IV, 27. Ex.)

$$= 8660254$$

II) AF (Geom. 63. Fig.) sey des Bogens AI Sinus;

FI dessen Quersinus, und

die gerade Linie AI seine Sehne:

So ist

$$AI = \sqrt{(AFq + FIq)} \text{ (Geom. 15. S.)}$$

Mithin

$\frac{1}{2}$ AI

$$\tfrac{1}{2}\,AI = \tfrac{1}{2}\sqrt{(AFq + FIq)}$$
$$= \sin \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{B}.\,AI$$

Heißt also

der $\mathfrak{B}.\,AI = x$;

so ist

$$\sin \tfrac{1}{2}\,x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sin x^2 + \sinv x^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sin x^2 + (r - \operatorname{Cos} x)^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{[\sin x^2 + (r - \sqrt{[r^2 - \sin x^2]})^2]}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{[\sin x^2 + r^2 - 2r.(r^2 - \sin x^2) + r^2 - \sin x^2]}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{[2r(r - \sqrt{(r^2 - \sin x^2)}]}\,(P)$$

Für

$x = 30^\circ$

ist

$$\sin 15^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\sin 30^{\circ 2} + \sinv 30^{\circ 2})}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\sin 30^{\circ 2} + (10000000 - \operatorname{Cos} 30^\circ)^2)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(5000000^2 + (10000000 - 8660254)^2)};$$

Und man sieht wie man nun mittelst der Formel bey (P) aus $\sin 15^\circ$ den für $7\tfrac{1}{2}^\circ$ und aus diesen, den für $3\tfrac{3}{4}^\circ$, u. s. w. finden könnte.

IIII) Aus

$$\sin 45^\circ = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\,r^2}$$
$$= \tfrac{1}{2}r.\sqrt{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}r.\,1{,}414213\ldots$$
$$= 5000000 \times 1{,}414213\ldots$$
$$= 5 \times 1414213\ldots$$

findet sich vermöge eben der Formel bey (P) der Sinus von $22\tfrac{1}{2}^\circ$ und aus diesem der für $17\tfrac{1}{4}^\circ$ u. s. f.

IIII) $r : \sin \alpha = 2 \sin \alpha : \sin 2\alpha$

Denn es sey (Fig. II.)

$BE = EA$
$= \alpha;$
$CA = r;$
$BD = \sin BCA$
$= \sin 2\alpha;$
$BF = \sin \alpha$
$= FA;$

so sind die rechtwinklichten Dreyecke DBA, FCA ähnlich, und daher (Geom. 26. S.)

$CA : CF = AB : BD.$

V) $\sin (30° + \alpha) = \sin (30° - \alpha) + \sqrt{3} . \sin \alpha$

Denn es sey der

Bogen $AB = 30°$,

folglich auch so groß der W. ACB; ferner sey

$FB = BK,$
$= \alpha$

also

$FBKA = 30° + \alpha,$

dieses Bogens Sinus sey $= IN$; und FK die Sehne von FBK; überdieß

$KA = 30° - \alpha$ und KM dessen Sinus.

So ist, wenn KO parallel mit CA,

der W. $KQB = GFK$
$= 30°$

folglich

$GK = \frac{1}{2} FK$
$= FI$
$= IK$

Aber,

$$FKq - GKq = KGq$$

oder

$$4\,IKq - IKq = FGq$$
$$= 3\,IKq$$
$$= IKq \times 3$$

Folglich

$$FG = IK \times \sqrt{3}$$

Also:

$$IN = KM + IK \times \sqrt{3}$$

VI) $\sin(60° + x) = \sin(60° - x) + \sin x$

Denn es sey

FT der Sinus von $60° - x$ = HB − FB;
KO der Sinus von $60° + x$ = HB + BK;

So ist

FI = GK (Bew. IV)
= der Sinus von FB = BK; und
KO = FT + GK

Ist z. E. $x = 5°$; so ist $\sin 55° + \sin 5° = \sin 65°$.

VII) Wenn man 30° zwölfmal halbirt, so ergiebt sich

$$\frac{30°}{2^{12}} = 52^{\text{II}}\,44^{\text{III}}\,3^{\text{IV}},75$$

ein Bogen, dessen Sinus (welcher nach II. gefunden werden kann) ohne merklichen Irrthum für den Bogen selbst (nämlich in Längenmaaß wie der Sinus ausgedruckt) genommen werden kann; und weil Sinusse die von ihren Bögen wenig oder gar

nichts unterschieden, ihnen proportional sind, so hat man, wenn γ ein solcher Bogen bedeutet,

$$\gamma : \sin\gamma = \text{Bog. } 1' : \sin 1'$$

VIII) Hieraus findet sich nach IV der Sinus von 2′, dann aber nach der Formel, (die die Sinus der Summe zweener Winkel ausdrückt, und im 19. Satze zu finden gelehrt wird,)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\mathrm{Col}\,\beta + \sin\beta\,\mathrm{Col}\,\alpha$$

der Sinus von 3′, 4′ u. s. w. bis 30° von da nach V die Sinus bis zu 60°, und endlich nach VI, die Sinus von 60° bis 90°.

IX) Daß man sie für nicht größere Bogen zu suchen braucht, erhellet aus der 2. Erkl. 2. und 4. Zusatze.

Die übrigen trigonometrischen Linien werden aus dem Sinus nach der 4. Erkl. 3, 5. Z.; auch 5. Erkl. 1. Zus. u. deren Erl. berechnet.

Man braucht nur Sinus, Tangente, Sekante und Quersinus für alle 90° und dessen Theile zu berechnen, die übrigen trigonometrischen Linien hat man alsdenn daraus unmittelbar (3, 5. Erkl.)

Hierüber lese man auch Herrn Hofr. Karstens Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften XIII. Abschn. der Geometrie, und n. a.

Wer dergleichen Berechnung aus der Analysis lernen will, findet unter andern in unsers Herrn

Autors

Autors, Analysis des Unendlichen 311. §. u. f. Anleitung dazu.

X) Die gefundenen Zahlen solcher Linien nun, hat man in Tafeln gebracht, und den Canon der Sinus und Tangenten, auch die trigonometrischen Tafeln, genannt.

In den gemeinen trigonometrischen Tafeln, oder dem kleinen Canon der Sinus und Tangenten stehen die trigonometrischen Linien von Grad zu Graden bis 90° und bey jedem Grad von 1′ bis zu 60′ berechnet.

Hingegen in dem größern Canon der Sinus und Tangenten oder den größern trigonometrischen Tafeln, von 10 zu 10 Secunden.

Solche Tafeln sind den meisten in den Erläuterungen des VI. Cap. 34. §. der Arithmetik angeführten Logarithmentafeln beygefügt.

1. Satz. 2. Anmerkung.

Es ist willkührlich, welchen Halbmesser man bey Berechnung der Trigonometrie zu Grunde legen will. Doch ist einer hiezu geschickter als der andere. Daher findet man in den itzigen trigonometrischen Tafeln für die Halbmesserslänge eine Zahl, die eine Potenz der 10 ist, wie wohl vor ohngefähr 300 Jahren ein Nürnberger Astronome, Johann Regiomontanus, da er die trigonometrischen Tafeln (wie wir sie noch haben) berechnete,

anfänglich den Halbmesser in 60 tausend Theile getheilt hat. —

In Gellibrands Tafeln ist der Halbmesser = 100 Billionen angenommen worden.

Johann Rheticus sezt ihn = 1000 Billionen. Er hat sehr richtige Tafeln geferriget; welche aber nicht eher als nach seinem Tode, von Pitiscus (welcher selbst ein trigonometrisches Werk geschrieben hat), mit einigen Zusätzen herauskamen. (S. Wolfs kurzer Unterr. von den vornehm. math. Schr. §. 86.) —

Unsere gebräuchlichen trigonometrischen Tafeln sind eigentlich für einen Halbmesser = 10000 Millionen berechnet, wiewohl derselbe in den gemeinen Tafeln nur = 10 Millionen angenommen worden.

Es haben also die Verfertiger unsers Canons die Länge eines jeden Sinus ꝛc. in 10000 Millionen Theilchen angegeben, indem sie ein solches als die Einheit ansahen, und suchten, wie viel davon jeder Sinus ꝛc. enthielte. —

Die Sinus, Tangenten ꝛc. in Theilen des Halbmessers angegeben, heissen natürliche Sinus, Tangenten ꝛc.

Mit ihnen, weil sie aus vielen Ziffern bestehen, läßt sich beschwerlich multipliciren und dividiren, welches doch fast allemal bey Rechnungen mit trigonometrischen Linien erfodert wird. Dieß bewog,

wog, wie schon bekannt, Nepern auf Vortheile und Verkürzung zu denken. Er fand die Logarithmen, welche er für die Sinus und Tangenten nach der Anzahl der Ziffern die die Zahlen ausmachen, welche dieser Linien Länge anzeigen, berechnete, wobey er den Sinustotus oder Halbmesser, = o sezte, daß also die Logarithmen negativ wurden, wenn die Sinus wuchsen. Dieß war aber unbequem: daher sezte **Brigg** den Sinustotus = 1 und seinen Logarithmen = o, und berechnete sie darnach. Auf eben diese Art stellte auch **Adrian Vlacq** die Berechnung der Logarithmen an, und Benjamin Ursus verfertigte so die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden. —

Logarithmen der Sinus, Tangenten ꝛc. heissen **künstliche Sinus, Tangenten** ꝛc. und sind den trigonometrischen Tafeln beygefügt worden.

Da der Sinustotus = 10 000 000 000 000, so ist sein Logarithme = 10 und eben so groß auch seine Kennziffer, welche bey dem künstlichen Sinus

von 89° 59′ bis 5° 45′; = 9
5° 44′ bis 35′; = 8
34′ bis 4′; = 7
2′ bis 1′; = 6

hingegen bey den künstlichen Tangenten von

1′ bis 3′; = 6
4′ bis 34′; = 7
35′ bis 3° 42′; = 8

5° 43′ bis 44° 59′; = 9
45° bis 84° 17′ = 10
84° 18′ bis 89° 25′ = 11
89° 26′ bis 89° 56′ = 12
89° 57′ bis 89° 59′ = 13

Eben so findet man sie auch in den kleinern trigonometrischen Tafeln; denn ob man gleich in solchen bey jedem Sinus und jeder Tangente die drey lezten Ziffern weggelassen, und also diese nur für den Halbmesser = 10 Millionen gefertiget hat: so sind demohnerachtet die Logarithmen dieser Linien für den Halbmesser = 10000 Millionen Theilen, beybehalten worden; daher kommt es auch, daß ihre Kennziffer auf die Menge der Ziffern der Zahlen der Sinus ꝛc. nicht passet.

Das giebt aber in dem trigonometrischen Gebrauche keinen Fehler, wenn ꝛc. (S. Buch.)

1. Satz. 3. Anmerkung.

Die Einrichtung der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln ist folgende:

Die Bogen oder Winkel, denen die Sinus und Tangenten zugehören, gehen in der natürlichen Ordnung, wie sie von 0 an immer um 1 Minute zunehmen, fort.

Die erste Hälfte, von denen einem jeden Grade zukommenden Minuten stehet der einen Seite von oben herunter gezählt und die andere Hälfte derselben auf der folgenden.

Der

Der Winkel auf der gegenüberstehenden Seite macht mit dem auf der ersten, mit ihm in einer wagrechten Reihe stehenden, Winkel 90°, und bey jedem findet sich der ihm zugehörige Sinus ꝛc. Dieß hat die Einrichtung veranlaßt, daß auf dieser Seite die Minuten von unten hinauf gezählet worden.

Daher sind die Grade allein auf einer Seite von 0° bis zu 45° bis an das Ende der Tafeln fortgezählt, und nun auf der andern Seite wieder rückwärts von 45° bis zu 90°.

Die erstern beyden Einrichtungen erleichtern das Nachschlagen der Winkel, Sinus ꝛc.; die dritte hingegen benimmt die Mühe, einen Winkel erst auf seine Ergänzung zu 90° zu bringen.

Hierdurch ergiebt sich der Vortheil, daß man, wenn ein gegebener Winkel in den Tafeln aufgeschlagen ist, nicht allein auf der Seite wo der Winkel stehet, seinen Sinus und Tangente, sondern auch auf der gegenüberstehenden Seite gleich seinen Cosinus und Cotangenten, findet: Ferner, wenn man einen gegebenen Cosinus und Cotangenten aufgeschlagen hat; so findet man auf der gegenüberstehenden Seite so gleich den ihm zugehörigen Winkel, und auch selbst den Sinus und Tangenten eben dieses Winkels oder Bogens.

Die Logarithmen dieser Linien, stehen beysammen neben den ihnen zugehörigen natürlichen Sinus und Tangenten. Und so gilt von ihnen eben

das, was vorhin von gleichgenannten Linien gesagt wurde.

Verlangt man, z. E. den Cosinus ꝛc. eines Winkels von 24° 30′ aus den Vlacqschen Tafeln, so sucht man diesen Winkel auf, und nimmt den Sinus ꝛc. des andern Winkels, der sich mit dem gegebenen in einer wagrechten Reihe befindet, und seine Ergänzung zu 90°, also = 65° 30′ ist.

Will man den Sinus, Cosinus ꝛc. eines stumpfen Winkels, z. B. von 120°, so sucht man in den Tafeln den Sinus, Cosinus ꝛc. seiner Ergänzung zu 180°, in unserm Beyspiele, den von 180° — 120° = 60°, auf. Eben so macht man es auch mit den künstlichen Sinus, Cosinus ꝛc.

In manchen trigonometrischen Tafeln, sonderlich in den neuern sind auch die Sekanten beygefügt. Ja, in Sherwins oder Gardiners Tafeln stehen ausser den Sinus und Tangenten auch noch die Sekanten und Quersinus, und für alle diese Linien die Logarithmen. Diese letztern Tafeln, sind, wie bekannt sehr rar; daher wurde davon zu Avignon 1770 eine neue Auflage mit einigen Vermehrungen, besorgt. Ihre Einrichtungen ist etwas anders, als die der gewöhnlichen. Man lernt sie aus unsers Herrn Autors astronomischen Abh. II. Samml. 19. u. f. S. kennen.

Zu den neuesten und besten trigonometrischen Tafeln sind auch die Schulzischen zu rechnen. Man kennt sie schon aus den Erläuterungen der Arithmetik

metik VI. Cap. 34. §. die Sinus ꝛc. sind darinne für den Halbmesser = 1 angegeben. — Ihre nähere Einrichtung wird man sich übrigens aus den ihnen vorgesetzten kurzen Erklärungen bekannt zu machen wissen.

1. Satz. 4. Anmerkung.

Der Sinus und Tangente dessen Logarithme = 0 seyn soll, muß = 1 seyn, wie aus der Lehre von Logarithmen bekannt ist.

Für den Halbmesser 10000 Millionen gehört dieser Sinus und Tangente zu einen sehr kleinen Bogen, welchen man daher jenen gleich setzen kann.

Man hat also die Größe eines Bogens = 1 aus der Peripherie anzugeben, deren Halbmesser = 10000 Millionen ist. Es ist aber

$$31415926536 : 180^\circ = 1 : \text{ges. Bogen},$$

welcher also

$$= \frac{180^\circ}{31415926536} = 0^\circ\ 0^{\text{I}}\ 0^{\text{II}}\ 0^{\text{III}}\ 4^{\text{IV}}\ 4^{\text{V}}\ 27^{\text{VI}} \ldots$$

Von rechtwinklichten Dreyecken.

3. Satz.

Gegeben:

1) Die Hypothenuse CD (2. Fig.)
2) der eine Cathetus DE.

Gesucht:

die schiefen Winkel, DCE, EDC.

Auflö-

Auflösung.

Bey Berechnung der Dreyecke kommt es meist allemal darauf an, daß man nach Beschaffenheit der Umstände eine oder mehrere Proportionen zu finden weiß, bey den die gegebenen und gesuchten Stücke, als Glieder, vorkommen.

Dieß erhält man hier leicht, in so ferne man folgendes überlegt.

Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyecke CDE, (Fig. 2.) die Hypothenuse CD für den Halbmesser, oder Sinus totus = r, (welcher bey würklicher Berechnung, allemal für den Halbmesser der Tafeln angenommen wird) ansiehet; so ist für diesen Halbmesser, der eine Cathetus, wie DE, der Sinus seines gegenüber stehenden Winkels DCE, und der Cosinus des anliegenden Winkels EDC; (2. Erkl. 3. Erkl.)

Also kann man CD einmal als Hypothenuse, und DE, als Cathetus; Dann CD als Halbmesser, und DE als des ihm entgegenstehenden Winkels Sinus oder des anliegenden Winkels, Cosinus, für diesen Halbmesser betrachten.

Dieß vorausgesezt, sieht man leicht die in der Auflösung im Buche stehenden Proportionen ein, aus denen sich für das Gesuchte die daselbst angesezten Formeln ergeben, und daher folgende Regel herleitet:

Man dividire die gegebene Seite durch die Hypothenuse, und multiplicire den Quotienten

cienten durch den Sinus totus; das Product giebt den Sinus des der gegebenen Seite entgegenstehenden Winkels, oder den Cosinus des ihr anliegenden Winkels.

Will man sich hier der Logarithmen bedienen; so hat man daraus folgende Regel:

Man addire des Sinus totus Logarithme zu den der gegebenen Seite, von dieser Summe ziehe man den Logarithmen der Hypotheuuse ab; die Differenz ist der Logarithme des Sinus des der gegebenen Seite entgegenstehenden Winkels, oder der Logarithme des ihr anliegenden Winkels Cosinus.

3. Satz. Exempel.

Es sey

$$\left.\begin{array}{l} CD = 5 \\ DE = 4 \end{array}\right\}$$ (Ruthen, Fuß, oder was es für Längenmaaß sey)

so ist

$$\sin DCE = \frac{r \cdot 4}{5}$$

$$= \frac{10\,000\,000 \times 4}{5}$$

$$= 8\,000\,000$$

Sucht man nun diesen Sinus in den Tafeln auf, so wird man ihn darinne nicht ganz genau finden. Man muß daher den Sinus nehmen, der ihm am nächsten kommt, welcher = 7998593 und der ihm zugehörige Winkel = 53° 7′ seyn wird. Diesen nun

nun sieht man als sin DCE an; und findet folglich DCE = 53° 7′, aber etwas zu klein, daß also DCE etwas, aber um keine Minute, größer als 53° 7′ seyn muß, weil DCE zum Sinus 8000000, gehört, hingegen 53° 57′ zum Sinus 7998583; und also jener zwischen diesem und dem Sinus von 53° 8′, folglich DCE selbst zwischen 53° 7′ und 8′ fällt. Dieses nun, daß nämlich DCE etwas größer als 53° 57′ ist, zeigt der Ausdruck

$$DCE \equiv 53^\circ\ 7' +$$

so wie der

$$CDE \equiv 36^\circ\ 53' -$$

daß den Winkel CDE noch etwas an 36° 53′, fehlt, welches aber ebenfalls < 1′ ist. Daß dieß leztere so ist, erhellet weil

$$CDE \equiv 90^\circ - DCE$$
$$\equiv 90^\circ - 53^\circ\ 7' +$$

Berechnung dieses Exempels in Logarithmen.

$$\log \sin DCE = \log r + \log DE - \log CD;$$

und

$$\log r = 10,0000000$$
$$\log 4 = 0,6020600$$
$$\log r + \log 4 = 10,6020600$$
$$\log 5 = 0,6989700$$
$$\log \sin DCE = 9,9030900$$

Diesen Logarithmen, wird man ebenfalls nicht genau in den Sinustafeln finden, also auch dafür den

den ihm am nächsten kommenden Logarithmen 9, 9030136 für log sin DCE und folglich den diesem Logarithmen zugehörigen Winkel 53° 7′ für DCE nehmen müssen; daß also

$$DCE = 53° 7′ +$$

wie vorhin.

So wie man (nach 2. S. 5. Anm.) fast allemal die gefundenen natürlichen und künstlichen Sinus nicht genau in den Tafeln findet, sondern dafür die ihn am nächsten kommenden nehmen muß; so geschiehet dieß auch bey den Tangenten ꝛc. daher können Anfänger die hier deshalb gegebenen Erläuterungen bey ähnlichen Berechnungen brauchen.

3. Satzes Zusatz.

Nach Geom. 15. S. ist

$$EC = \sqrt{(CDq - DEq)};$$

Oder man findet aus der Hypothenuse und dem einen Catheten, den andern, wenn man die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate der gegebenen Dinge ziehet.

Wäre aber die Hypothenuse und ein schiefer Winkel gegeben, (oder sonst bekannt,) so findet man daraus durch die im Buche gefundene Formel den diesem gegebenen Winkel anliegenden Catheten, in eben dem Maaße in dem die Hypothenuse gemessen ist. *)

Ge-

*) Dieß lezte hat man sich in ähnlichen Fällen zu erinnern.

Gedachte Formel in Worten ausgedruckt, heißt:

Man multiplicire den Cosinus des gegebenen Winkels durch die Hypothenuse, und das Product dividire man durch den Sinus totus.

Will man sich der Logarithmen bedienen; So addirt man zum Logarithmen des Cosinus des gegebenen Winkels den Logarithmen der Hypothenuse, und zieht von der Summe den Logarithmen des Sinus totus ab; die Differenz giebt den Logarithmen des am gegebenen Winkel anliegenden Catheten.

4. Satz.

Gegeben: Die beyden Catheten CA, AG (Fig. 2)

Gesucht: Die Winkel ACG, AGC.

Auflösung.

Hier verfährt man auf eine ähnliche Art wie im 3. Satze.

Wenn man nämlich in einem rechtwinklichten Dreyecke GAC den einen Catheten, wie CA, für den Halbmesser annimmt, so ist für diesen Halbmesser der andere, GA, die Tangente des gegenüberstehenden Winkels ACG, und des anliegenden Winkels AGC, Cotangente. (4. und 5. Erkl.)

Betrachtet man also AC und AG einmal als Catheti, das anderemal als Halbmesser und Tangente:

gente: so hat man die Proportion der Auflösung im Buche, und daraus die daselbst angesezte Formel, welche in Worten ausgedruckt, für das Gesuchte Folgende Regel giebt:

Den Catheten der dem gesuchten Winkel entgegen steht, dividire man mit den andern Catheten, und multiplicire den Quotienten durch den Sinus totus:

Das Product ist die Tangente des gesuchten Winkels.

Für die Rechnung mit Logarithmen, erhält man den Logarithmen der Tangente des gesuchten Winkels, wenn man zum Logarithmen des Sinus totus, den Logarithmen des dem gesuchten Winkels gegenüber stehenden Catheten addirt, und von der Summe den Logarithmen des andern Catheten abzieht.

Hat man nun den Winkel ACG gefunden, so ergiebt sich gleich der Winkel AGC durch 90° — ACG.

4. Satz. Exempel.

Berechnung dieses Exempels durch Logarithmen.

Da

$CA = 3,$
$AG = 4,$

und

$\log \text{Tang } ACG = \log r + \log AG - \log CA;$

so ist

$$\log \text{Tang ACG} = \log r + \log 4 - \log 3;$$

Also:

$$\log r = 10,0000000$$
$$\log 4 = 0,6020600$$

$$\log r + \log 4 = 10,6020600$$
$$\log 3 = 0,4771212$$

$$\log \text{tang ACG} = 10,1249388$$

Diese Tangente in den Tafeln aufgesucht, kommt der am nächsten, welche zu den Winkel 53° 7′ gehört;

Also ist

$$\text{ACG} = 53° 7' +,$$

und daher

$$\text{AGC} = 90° - 53° 7' +$$
$$= 36° 53' -$$

4. Satz. Zusatz.

So wäre ..... $\left[\frac{\text{CA sec ACG}}{r}\right]$

Denn es ist (Fig. 2.)

$$\text{CA} : \text{CG} = r : \sec \text{GCA}$$

oder

$$r : \sec \text{GCA} = \text{CA} : \text{CG};$$

Diese und dergleichen Proportionen finden sich aus ähnlicher Betrachtung wie in den Erläuterungen des 3. und 4. S. ist angestellet worden.

Ueberhaupt nimmt man allezeit in der Trigonometrie die gegebenen Seiten des rechtwinklichten Dreyecks einmal in ihrer eigentlichen Bedeutung, dann in ihrer trigonometrischen.

Die gefundene Formel in Worten ausgedruckt, heißt:

Man multiplicirt den einen Catheten, CA, mit der Sekante des an ihm liegenden Winkels, ACG und dividire das Product durch den Sinus totus.

oder ..... $\frac{CA \cdot r}{\text{Cof ACG}}$]

Denn, CG, als r betrachtet, giebt

$$\text{Cof GCA} : r = AC : GC.$$

Die hieraus im Buche gefundene Formel giebt die Hypothenuse und heißt in Worten ausgedruckt:

Den Catheten, CA, durch den Cosinus seines anliegenden Winkels dividirt, und den Quotienten mit dem Sinus totus multiplicirt.

Rechnet man also mit Logarithmen; so erhält man den der Hypothenuse CG, wenn man zum Logarithmen des Catheten CA den des Sinus totus addirt, und von der Summe den Logarithmen des Cosinus des an CA liegenden Winkels ACG abzieht.

Dieß ..... Exempel]
Im Exempel des 4. Satzes ist

$CA = 3;$
$ACG = 53° 7'$

Also

$$\log CG = \log 3 + \log r - \log \text{Cof } ACG$$

und

$$\log CA + \log r = \log 3 + \log 10000$$

Mill.

$$= \text{ꝛc. (S. Buch).}$$

5. Satz.

Gegeben

Im rechtwinklichten Dreyecke ECD (Fig. 2) die Hypothenuse CD, und ein schiefer Winkel DCE.

Gesucht

1) das Perpendikel DE
2) die Grundlinie CE.

Auflösung

Für 1)

Aus der Proportion

$$r : \sin DCE = CD : DE$$

hat man

$$DE = \frac{CD \cdot \sin DCE}{r}$$

Man erhält also das gesuchte Perpendikel DE, wenn man die Hypothenuse CD in den Sinus des dem Perpendikel entgegenstehenden Winkels DCE multiplicirt, und das Product durch den Sinus totus dividirt.

Für

Für die Rechnung mit Logarithmen hat man also

$$\log DE = \log CD + \log \sin DCE - \log r.$$

Für 2)

Die Proportion

$$r : \text{Cosin } DCE = CD : CE$$

giebt

$$CE = \frac{CD \,.\, \text{Cosin } DCE}{r}$$

Man findet also die Grundlinie CE, **wenn man die Hypothenuse CD in den Cosinus des an CE liegenden Winkels DCE multiplicirt, und dieses Product durch den Sinus totus dividirt.**

Für die Rechnung mit Logarithmen hat man

$$\log CE = \log CD + \log \text{Cosin } DCE - \log r.$$

Exempel werden sich Anfänger ohne Schwierigkeit selbst erfinden.

6. Satz.

In dieser Aufgabe kann der eine Cathete EC und entweder der an ihm liegende Winkel ECD, oder der ihm gegenüberstehende Winkel EDC, gegeben seyn.

Ist also

gegeben:

Der Cathete EC, und der an ihm liegende schiefe Winkel ECD;

So sucht man

1) den andern Catheten ED, und
2) die Hypothenuse CD.

Auflösung.

Für 1)

Durch die Proportion

$$r : \text{tang } ECD = EC : ED,$$

findet man

$$ED = \frac{EC \,.\, \text{tang } ECD}{r}$$

Also:

Den gegebenen Catheten EC in die Tangente des an ihm liegenden Winkels ECD multiplicirt, und das Product durch den Sinus totus dividirt, giebt den gesuchten Catheten ED.

Für die Rechnung mit Logarithmen hat man

$$\log ED = EC + \text{tang } ECD - \log r$$

Für 2)

Aus der Proportion

$$\text{Cosin } ECD : r = EC : CD$$

hat man

$$CD = \frac{r \,.\, EC}{\text{Cosin } ECD}$$

Folglich findet sich die Hypothenuse CD, wenn in das Product des Sinus totus und des gegebenen Catheten EC, der Cosinus des an ihm liegenden Winkels dividirt wird.

Für die Rechnung mit Logarithmen hat man

$$\log CD = \log r + \log EC - \log \text{Cosin } ECD$$

6. Satzes 1. Anmerkung.

Wäre der Cathete EC und der gegenüberstehende Winkel EDC gegeben; so fände man den

W. ECD = 90° — EDC (Geom. 13. S. 3. 3.)

und man dürfte also nur in die im vorigen Satzes Auflösung gefundenen Formeln statt des Winkels ECD einen setzen, der so viel Grade enthielte als 90° — EDC, betrüge.

Da aber

$$\text{tang ECD} = \text{tang (90° — EDC)} = \text{Cot EDC (5. Erkl.)}$$

und

$$\text{Cos ECD} = \text{Cos (90° — EDC)} = \text{sin EDC (3. Erkl.)}$$

so hat man aus den hier gegebenen Dingen,

$$ED = \frac{EC \,.\, \text{Cotang EDC}}{r}$$

also

$$\log ED = \log EC + \log \text{Cot EDC} - \log r$$

und

$$CD = \frac{r \,.\, EC}{\text{sin EDC}}$$

also

$$\log CD = \log r + \log EC - \log \text{sin EDC}.$$

7. Satz.

Gegeben:

Ein auf dem Papiere vorgezeichneter Winkel ACG (2. Fig.)

Gesucht:

Die Anzahl Grade die er enthält.

Auflösung.

Von einem in 1000 gleiche Theile getheilten Maasstabe, trage man auf dem einen Schenkel CG dieses Winkels 1000 Theile von C in G;

Lasse hierauf von G auf den andern Schenkel CA, das Loth GA herab:

Dieses ꝛc. (S. Buch.)

Exempel.

Hätte man auf diesem Maasstabe AG = 173 Theile gefunden; so suche man in den trigonometrischen Tafeln einen Sinus auf, dessen erste drey Ziffern, 173 sind. Der zu diesem Sinus gehörige Winkel 9° 58′, ist der gesuchte.

Solchergestalt findet man Winkel zwar nicht in einzeln Minuten, doch von 4 bis 5 Minuten genau, vorausgesezt, daß die Winkel nicht über 50° betragen.

Diese Voraussetzung gründet sich darauf: daß für größere Winkel die erstern drey Ziffern jedes Sinus einerley sind, wenn gleich der Unterschied der zugehörigen Winkel 5 Minuten ist; ja bey Winkeln nahe an 90° kann er 1° seyn, ohne eine Verschiedenheit der erstern drey Ziffern der Sinus zu bemerken.

7. Satz. Zusatz.

An dem Puncte C (Fig. 2.) einen Winkel z. E. von 59° 51′, zu verzeichnen.

Man ziehe durch C die gerade Linie CA;

Trage hierauf von C in A, 502 Theile (als so viele, welche die Zahl giebt, die man erhält, wenn man von dem Cos 59° 51′, die 4 lezten Ziffern weggeschnitten hat) des tausendtheilichen Maasstabes;

Durch A richte man ein Loth AΔ auf;

Trage auf dieses aus A in G von eben diesem Maasstabe so viel Theile als die Zahl 864, giebt, welche man bekommt, wenn man die 3 erstern Ziffern des Sinus 59° 51′ nimmt;

Und ziehe alsdann durch G und C die Linie GC;

So wird GCA = 59° 57′, seyn.

Nähme man CA = 1000 Theile des Maasstabes, und sezte auf das Loth AG so viele Theile als die Zahl der 3 ersten Ziffern der Tangente von 59° 51′ gäbe; so würde man ebenfalls GCA, = 59° 51′ auf den Papier erhalten.

Diese Methode aber kann bey einem Winkel nahe an 90 Graden nicht gebraucht werden, weil für solchen die Tangente gar zu groß wird.

Herr Lambert hat im 2ten Theile seiner Beyträge zur Mathematik ein Werkzeug beschrieben, durch

durch das man sowohl Winkel verzeichnen als ausmessen kann.

Seine Einrichtung gründet sich auf die Methode, Winkel durch ihre Tangenten zu bestimmen.

Sie besteht aus einem von Holz, Elfenbein oder Metall gemachten rechtwinklichten gleichschenklichten Dreyecke, auf dessen Catheten nach einem 1000 theiligen Maasstabe der Winkel von 0° bis 45° Tangenten verzeichnet sind, so daß jeder Cathete = 1000 Theile des Maasstabes ist.

Mehreres hiervon lese man im angeführten Buche 170 u. f. S.

Von gleichschenklichten Dreyecken.

8. Satz.

Gegeben:

In einem gleichschenklichten Dreyecke LMN (4. Fig.)

I) Die Grundlinie LN und der Schenkel LM;

II) LN und den Winkel LMN an der Spitze.
Er heisse u;

III) LM und u

Gesucht:

Für I) den Winkel u;
" II) den Schenkel LM;
" III) die Grundlinie LN.

Auflösung.

Aus der Spitze M fälle man auf die Grundlinie LN das Loth MP herab; so ist

$$\left.\begin{array}{l} LP = \frac{1}{2} LN \\ \text{W. } LMP = \frac{1}{2} LMN \\ = \frac{1}{2} u \end{array}\right\} \text{(Geom. 9. S. 5. Z.)}$$

Ueberdieß hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke LMP,

$$LM : LP = r : \sin LMP \text{ (3. S.)}$$

d. i.

$$LM : \tfrac{1}{2} LN = r : \sin \tfrac{1}{2} u$$

Also:

$$(\alpha)\ LM \times \sin \tfrac{1}{2} u = r \cdot LN \text{ (Ar. V. 31)}$$

Folglich für

I)

$$\sin \tfrac{1}{2} u = \frac{r \cdot \frac{1}{2} LM}{LN} \ (\alpha)$$

II)

$$LM = \frac{r \cdot \frac{1}{2} LN}{\sin \frac{1}{2} u} \ (\alpha)$$

III)

$$\tfrac{1}{2} LN = \frac{LM \cdot \sin \frac{1}{2} u}{r} \ (\alpha)$$

oder

$$LN = \frac{2 \cdot LM \cdot \sin \frac{1}{2} u}{r}$$

Diese

Diese Formel dient auch aus den gegebenen Bogen und Halbmesser des erstern Sehne zu finden.

Denn Fig. 4. ist LM der Halbmesser, u = dem Bogen LN, und LPN die Sehne dieses Bogens.

In Logarithmen hat man für

I)

$$\log \sin \tfrac{1}{2} u = \log r + \log \tfrac{1}{2} LN - \log LM$$

II)

$$\log LM = \log r + \log \tfrac{1}{2} LN - \log \sin \tfrac{1}{2} u$$

III)

$$\log \tfrac{1}{2} LN = \log LM + \log \sin \tfrac{1}{2} u - \log r.$$

Exempel.

Es sey

$$LM = 36;$$
$$LN = 28;$$

also

$$\tfrac{1}{2} LN = 14;$$

so ist für

I)

$$\log \sin \tfrac{1}{2} u = \log r + \log 14 - \log 36,$$

und

$$\log r = 10,0000000$$
$$\log 14 = 1,1461280$$
$$\overline{11,1461280}$$
$$\log 36 = 1,5563025$$
$$\overline{\log \sin \tfrac{1}{2} u = 9,5898255}$$

welcher dem 95897888 in den Tafeln am nächsten

sten kommt, zu dem der Winkel 22° 53′ gehört: Also ist

$$u = 2 . (22° 53′ +)$$
$$= 45° 46′ +;$$

mithin jeder der Winkel an der Grundlinie

$$= \frac{180° - 45° 46′ +}{2} = 62° 7′ -$$

II)

$$\log LM = \log r + \log 14 - \log \sin 22° 53′$$

also

$$\log r + \log 14 = 11,1461280$$
$$\log \sin 22° 53′ = 9,5897888$$
$$\log LM = 1,5563392$$

welchem der Zahl 36 Logarithme am nächsten kommt.

Also LM = 36, wie gehörig.

Daß man aber einen etwas größern Logarithmen als den der Zahl 36, erhält, rührt daher, weil log sin 22° 53′ etwas kleiner als log sin $\frac{1}{2}$ u ist.

9. Satz. 4. Zusatz.

Einen geradlinichten Transporteur zu fertigen, verfahre man so:

Man ziehe (Fig. IV.) eine gerade Linie AC,

und durch A auf AC ein Loth AB, worauf man eine gewisse Anzahl gleicher Theile z. E. 5, abseze;

durch B ziehe man mit AC eine Parallele,

und

und trage von einem 1000 theilichten Maasstabe von A nach 5° die Sehne von 5°, (welche für den Halbmesser 1000, = 87 ist, [1. B.]); also 87 Theile des Maasstabes;

Von B nach 10° setze man die Sehne von 10°; also, (weil sie für eben den Halbmesser = 174 ist) 174 Theile des Maasstabes;

Von A hingegen nach 15° die Chorde von 15°, also, aus gleicher Ursache, 261 Theile, u. s. w. bis endlich von B nach 90° die Chorde von 90°, oder, (weil diese Sehne für den Halbmesser 1000, = 1414), 1414 Theile des Maasstabes abgesezt sind.

Durch die Theilpuncte auf AB ziehe man mit AC lauter Parallelen,

und dann die schiefen Linien von B nach 5°, von 5° nach 10° u. s. w.

So ist der Maasstab BC ein geradlinichter Transporteur, weil man auf ihm die Sehnen aller Winkel von 0 bis 90° vorfindet.

Denn weil in dem △ BA5°, die Seite AB in 5 gleiche Theile getheilet ist; so sind in diesem Dreyecke, die mit A5° parallelen Querstückgen a1, b2, c3, d4, A5° nach der Ordnung die Sehnen von 1°, 2°, 3°, 4°, 5°.

In dem Trapezio A5°B10° sind die Querstückgen A5°, d6, c7 ꝛc. von A5° nach B10° heraufgerechnet, nach der Ordnung die Sehnen, von 5°, 6°, 7° ꝛc.

In

In dem Trapezio B 10° A 15° hat man von B 10°, nach A 15° herunter gerechnet, die Sehnen von 10°, 11°, 12°, 13°, 14°, 15°.

Also würde, z. E. das Querstück von dem Theilpuncte b bis nach f die Sehne von 42° seyn.

Und so hätte man alle Sehnen der einzeln Grade von 0 bis 90°.

Dieses Verfahren, die mittlern Sehnen durch Zeichnung zu bestimmen, hat offenbar mit der Verfertigung des verjüngten Maasstabes viel Aehnlichkeit. Dabey aber, ist, wie man leicht sieht, die Voraussetzung angenommen, daß die Sehnen von 5 zu 5 Graden gleichförmig wachsen; welches doch nur für kleine Winkel gilt und diese Voraussetzung desto unrichtiger wird, je größer die Winkel sind; wie sich leicht aus Betrachtung einer Sehnentafel, auch der Sinusse, ergiebt.

Man hat daher hier auf den geradlinichten Transporteur nur die Sehnen von 5 zu 5 Graden genau, weil man sie unmittelbar aufgetragen hat; die durch Zeichnung gefundenen Sehnen, sind insgesammt desto unrichtiger, je größern Winkeln oder Bogen sie zugehören.

Da die Sehnen von einzeln zu einzeln Graden gleichförmiger als von 5 zu 5 Graden, wachsen, so thut man besser, wenn man für alle einzelne Grade die Sehnen berechnet, und daraus einen geradlinichten Transporteur fertiget:

Denn dadurch kann man auch die Sehnen solcher Bogen, die zwischen die einzeln Grade fallen, mit erträglicher Zuverläßigkeit bestimmen. —

Die Größe eines Winkels LMN (Fig. 8.) durch den geradlinichten Transporteur zu bestimmen.

Man nehme auf ihn die Weite B60° (Fig. IV.) welches die Sehne von 60° oder der Halbmesser des Kreises ist, zu den die Sehnen gehören;

Beschreibe damit aus M, des Winkels Scheitel, den Kreisbogen LN;

Fasse mit dem Zirkel dessen Sehne LPN;

und trage sie auf den Transporteur, indem man die eine Zirkelspitze in einem Theilpunct auf BA einsetzet, und untersuchet auf welchem Theilpunct einer schiefen Linie (z. E. wie ad) die andere hinfällt;

So weiß man den Winkel LMN, zu dem die Sehne LPN gehört.

Gesezt die Sehne LPN auf den geradlinichten Transporteur getragen, gehe von b nach f, so würde der Winkel LMN = 42° seyn.

Von allen diesen lese man in Herrn Professor **Mayers practischer Geometrie**, 1. Th. §. 106, 138.

10. Satz.

Bedingung

ABC (Fig. 5.) sey ein geradlinichtes Dreyeck dessen Seiten BC, CA, AB,

und

und die ihnen entgegenstehenden Winkel nach der Ordnung, A; B, C; sind

Behauptung.

So ist

$$BC : CA = \sin A : \sin B$$
$$BC : AB = \sin A : \sin C$$
$$CA : AB = \sin B : \sin C$$

Vorbereitung.

Man beschreibe nun das Dreyeck ABC einen Kreis (17. S. 1. B. Geom.);

Beweis.

So liegen die Puncte A, B, C, in der Peripherie desselben, die Seiten AB, BC, CD, sind Sehnen der Bögen AbB, BcC, AaC dieses Kreises, und des Dreyecks Winkel, Peripheriewinkel, daß also

1) $\frac{1}{2}$ BcC = A
2) $\frac{1}{2}$ CaA = B (Geom. 21. S.)
3) $\frac{1}{2}$ AbB = C

und

4) $\frac{1}{2}$ BC = sin $\frac{1}{2}$ BcC (2. Erkl. 1. B.)
= sin A (1)
5) $\frac{1}{2}$ AC = sin $\frac{1}{2}$ AaC
= sin B (2)
6) $\frac{1}{2}$ AB = sin $\frac{1}{2}$ AbB
= sin C (3)

alle, Sinusse für den Halbmesser des Kreises um K.

Folglich:

$$\tfrac{1}{2} BC : \tfrac{1}{2} AC = \sin A : \sin B \quad (4, 5)$$

d. i.

$$BC : AC = \sin A : \sin B$$

Ferner:

$$\tfrac{1}{2} BC : \tfrac{1}{2} AB = \sin A : \sin C \ (4, 5,)$$

d. i.

$$BC : AB = \sin A : \sin C$$

Endlich

$$\tfrac{1}{2} AC : \tfrac{1}{2} AB = \sin B : \sin C \ (5, 6.)$$

d. i.

$$AC : AB = \sin B : \sin C$$

12. Satz.

Man kann aber auch .....]

Dieses Verfahren zeigt wie man aus einer trigonometrischen Linie, oder ihrem Logarithmen, so sich nicht in den Tafeln findet, den zugehörigen Winkel erhalten könne, wenn nicht die größte Schärfe verlangt wird.

Das Verfahren selbst aber beruhet auf die Voraussetzung:

Daß von einer Minute zur folgenden, nicht allein die trigonometrischen Linien, sondern auch ihre Logarithmen in einerley Verhältniß mit den Bogen selbst wachsen: d. h. daß die Differenzen dieser Linien oder ihrer Logarithmen, den Differenzen der dazu gehörigen Bogen proportional sind.

Diese Voraussetzung ist bey kleinen Winkeln ziemlich unrichtig; doch vermindert sich bey den Sinussen der Fehler, je größer die Winkel werden;

den; da er hingegen bey den Tangenten zunimmt, je näher die Winkel dem rechten kommen.

Das Verfahren durch das Exempel im Buche zu erläutern, muß man sich erinnern, daß der gefundene log sin C, = 9, 8937451, zwischen dem log sin 51° 31′, = 9, 8936448, und log sin 57° 32′, = 9, 8937452 fällt.

Nun suchet man die Differenz von

9, 8937452, und
9, 8936448

= 1014;

die Differenz von

9, 8937452
9, 8937451

= 1 (= log sin 51° 32′ — l sin C)

und schließe:

1004 : 1 = 1′ : x
= 60″ : x
= 3600‴ : x

Also

$$x = \frac{3600'''}{1004} = 3'''$$;

Diese 3‴ sind es, um wie viel, der Winkel C kleiner als 51° 32′:

Man muß sie also davon abziehen um den Winkel C selbst zu erhalten; nämlich

$51° 32' = 51° 31' 60''$
$= 51° 31' 59'' 60'''$; davon
$3'''$ abgez.

Giebt $C = 51° 31' 59'' 57'''$

wie im Buche.

Macht man statt der leztern Differenz die

9, 8937451
9, 8936448

Diff. 1013 ($= l \sin C - l \sin 51° 31'$)

und schließt,

$$1004 : 1013 = 3600''' : \frac{3600 \times 1013}{1004}$$

so erhält man $69''$ $57'''$ als das um wie viel C größer als $57°$ $31'$ ist, welches man hier dazu addiren muß. Dieß hat man allezeit zu thun, wenn eine von den beyden Differenzen, der Unterschied des gefundenen Logarithmen und seines nächst kleinern ist.

Kehrt man das Verfahren um, so kann man bey eben der vorigen Voraussetzung eines gegebenen Winkels, (der nicht in den Tafeln steht) Logarithmen finden, wenn gleichfalls auch nicht die größte Schärfe nöthig ist.

Folgendes Beyspiel wird das Verfahren in diesem Falle, hinlänglich zeigen.

Der Winkel sey $= 51° 31' 59'' 57'''$;

so ist

l sin

l sin 51° 32′ = 9, 893752
l sin 51° 31′ = 9, 8936448

Diff. 1014

und man findet

60″ : 59″ 57‴ = 1014 : vierten prop. Z.

d. i.

3600″ : 3597‴ = 1014 : 1013;

Nun

zum l sin 51° 31′ = 9, 8936448
diese 4te Zahl = 1013 add.

kommt l sin 1° 31′ 59″ 57‴ = 9, 8937451.

Eben so wendet man das Verfahren auf Tangenten ꝛc. an.

12. Satz. 1. Zusatz.

Der nach dem 12. Satze gefundene Logarithme kann so wohl dem Sinus eines spitzigen als stumpfen Winkels gehören (2. Erkl. 2. Z.). Käme er einem stumpfen Winkel zu; so wäre im Exempel

C = 180° — 51° 32′ = 128° 28′.

Daß dieß aber so seyn kann erhellet folgendergestalt:

Aus B (6. Fig.) beschreibe man mit BC einen Kreis, welcher AC zweymal, in C und c, schneiden wird; ziehe hierauf Bc, so ist in den beyden Dreyecken ABC, ABc

BC = Bc (12. Erkl. Geom.)
AB = AB (Ar. 1. 87)
W. A = W. A.

Also in beyden, die gegebenen Dinge einerley.

Man muß daher wissen, ob der gesuchte Winkel spitzig oder stumpf ist, welches allemal die Umstände entscheiden.

12. Satz. 2. Zusatz.

Da der Winkel A gegeben, und C gefunden worden; so hat man

$$B = 180° - (A + C)$$ [Geom. 13. S.]

und folgende Proportionen (Fig. 5)

$$\left.\begin{array}{l} \sin C : \sin B = AB : AC; \\ \sin A : \sin B = BC : AC, \end{array}\right\}$$ (10. S.)

Aus jeder kann man AC finden.

13. Satz.

Gegeben:

Zwoer Größen x, y, Summe S und, Unterschied D,

Gesucht:

Die Größen x, y selbst.

Auflösung.

Da

$$S = y + x$$
$$D = y - x$$

---

so ist:

$$S + D = 2y$$

---

also:

$$\frac{S + D}{2} = y$$

$$= \tfrac{1}{2} S + \tfrac{1}{2} D$$

Ferner:

Ferner:

$$S = y + x$$
$$D = y - x$$

Also:

$$S - D = 2x$$

Folglich

$$\frac{S - D}{2} = x$$

$$= \tfrac{1}{2} S - \tfrac{1}{2} D$$

Man findet also die größere Größe y, wenn man zur halben Summe die halbe Differenz addirt; zieht man sie aber davon ab, so findet man die kleinere Größe x.

14. Satz.

Bedingung:

ABC (7. Fig.) sey ein Dreyeck, wo

AB + AC die Summe der beyden Schenkel AB, AC,

AC — AB ihr Unterschied,

und die beyden Winkel an BC, der Grundlinie,

$ABC = \beta$, $ACB = \gamma$

Behauptung:

$AB + AC : AC - AB = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$

Vorbereitung.

1) Man verlängere den Schenkel AC der dem größten Winkel ABC = β gegenüber stehet;

2) Trage auf diese Verlängerung aus A, (wo die Schenkel zusammenstoßen) in Q die dem kleinsten Winkel ACB = γ entgegen stehende Seite AB, und ebenfalls diese auch aus A in T auf AC, daß also AQ = AT = AB;

3) Ziehe durch B und T die gerade Linie BT,

4) durch B und Q aber die Linie QV, und

5) fälle auf sie aus C (wo die Grundlinie BC und Seite AC zusammenstossen) das Loth CV.

Beweis.

Nun ist der

$$\text{W. QAB} = \left.\begin{matrix} \text{ABC} + \text{ACB} \\ = \text{ABT} + \text{ATB} \end{matrix}\right\} \text{(G. 13. S. 1. B.)}$$

Also:

$$\text{ABC} + \text{ACB} = \text{ABT} + \text{ATB}$$
$$\text{ABT} = \text{ATB} \text{ (2. Vorb. u. G. 2. S. 3. B.)}$$

Folglich

$$\text{ABC} + \text{ACB} = 2\ \text{ABT}$$
$$\beta + \gamma = \text{ABC} + \text{ACB}$$

Also:

$$\beta + \gamma = 2\ \text{ABT}$$

Folglich

$$\text{I)}\ \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \text{ABT} = \text{ATB}$$

Ferner:

Ferner:

$$ABT + TBC = ABC$$
$$= \beta$$

Also

$$ABT + TBC - ABT = \beta - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$

Mithin:

II) $$TBC = \beta - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$
$$= \beta - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{2}\gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}(\beta - \gamma)$$

Nun stelle man sich vor, daß aus A mit AQ = AT = AB (2. Vorb.) ein Kreis beschrieben sey; so wird dieser durch Q. B, T gehen, und der Winkel QBT ein Winkel im Halbkreis, folglich

$$= R$$

seyn (G. 21. S. 1. Z.), und weil VBT und QBT, Nebenwinkel, auch

$$VBT = R;$$

Mithin, (da $CVB = R$ [5. Vorb.])

$$TBV + BVC = 2\,R$$

und folglich

BT parallel mit CV (G. 11. S.)

seyn. Also ist der

III) W. $TBC = BCV$ (G. 12. S. 2. Z.)

Aber:

$$TBC = \tfrac{1}{2}[\beta - \gamma] \text{ (II)}$$

Folglich

IV) $$BCV = \tfrac{1}{2}[\beta - \gamma]$$

Ueberdieß, da der

W. $ATB = TBC + TCB$ (G. 13. S. 1. Z.)
$TBC = BCV$ (III)

$ATB = BCV + TCB$
$= ACV$ (Vorer. 8.)
$ATB = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ [I]

V) $ACV = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$

Nimmt man nun CV als einen Halbmesser an, so ist für denselben VQ des Winkels ACV, und VB des Winkels BCV Tangente (4. Erkl.); Also

$QV = \text{tang } \frac{1}{2}[\beta + \gamma]$ (V)
$BV = \text{tang } \frac{1}{2}[\beta - \gamma]$ (IV)

Folglich, QV, und BV einmal in ihrer eigentlichen Bedeutung und dann in ihrer trigonometrischen genommen,

$QV : BV = \text{tang } \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : \text{tang } \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$

Da aber

$QB : BV = QT : TC$ (Geom. 25. S.)

also:

$QB + BV : BV = QT + TC : TC$ (Ar. V. 34, III)

d. i.

$QV : BV = QC : TC$

Folglich:

$QC : TC = tg \frac{1}{2}(\beta + \gamma) : tg \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$

und, (weil $QC = AQ + AC = AB + AC$ (2. Vorb.), $TC = AC - A\Gamma = AC - AB$)

AB +

$$AB + AC : AC - AB = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma) : \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

15. Satz. Zusatz.

Hat man in dem Δ ABC (Fig. 7.) nach dem 15. S. die Winkel

$$ABC = \beta;$$
$$ACB = \gamma,$$

gefunden, so hat man, da AB, AC, gegeben, nach dem 10. Satze

$$\sin\gamma : \sin BAC = AB : BC$$
$$\sin\beta : \sin BAC = AC : BC.$$

Aus jeder dieser Proportionen läßt sich BC finden.

16. Satz.

Wenn zwo aus einem Puncte (A) gezogene gerade Linien (AH, AC,) einen Kreis schneiden; so stehen diese Linien, (AH, AC) deren Größe durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct, (A) und durch die Puncte, (H, C) wo sie den Kreis zum zweytenmale schneiden, bestimmt wird, mit den Theilen (AE, AD) die ausser dem Kreise, zwischen ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte (A) und den Puncten, (E, D) wo die Linien (AH, AC) den Kreis zum erstenmale schneiden, in umgekehrter Verhältniß.

Bedingung:

Aus A (8. Fig.) seyen die Linien AH, AC gezogen, die den Kreis um B, in E, D, H, C schneiden;

Behauptung:

So ist

$$AC : AH = AE : AD.$$

Vorbereitung.

Man ziehe ED und HC;

Beweis.

So ist in dem Viereck DH,

$$EDC + H = 2\,R \text{ (Geom. 22. S. 9. Z.)}$$

Aber

$$ADE + EDC = 2\,R \text{ (Geom. 8. S.)}$$

Folglich

$$ADE + EDC = EDC + H$$
$$EDC = EDC$$

und

$$ADE = H \text{ (Ar. I. 88.)}$$

überdieß

$$A = A$$

mithin

$$ADE + A = H + A$$
$$A + ADE + AED = H + A + HCD \text{ (G. 13. S.)}$$

Also:

$$(A + ADE + AED) - (ADE + A) = (H + A + HCD) - (H + A)$$

Folglich:

$$W.\ AED = W.\ ACD.$$

Also die Dreyecke DAE, HAC, ähnlich (Geom. 27. S. Z.); Folglich

$$AC : AH = AE : AD.$$

16. Satz. Zusatz.

Wenn man sich vorstellt, daß AH und A nach F zu bewegt werde, so muß AH einmal in die Lage der Tangente AF kommen; alsdann aber, wird aus AE, und AH, die AF, und folglich $AF \times AF = AFq$ aus $AH \times AE$.

Nimmt man dieß mit AC vor; so erfolgt eben das.

Zieht man also aus einem Puncte A eine gerade Linie AC, die einen Kreis in D und C schneidet, und aus eben diesem Puncte A an eben den Kreis eine Tangente AF, so ist diese die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen AC und AD.

Denn $AC \times AD = AFq$; Also

$$AC : AF = AF : AD$$

17. Satz.

Gegeben:

Die drey Seiten AB, BC, AC des Dreyecks ABC.

Gesucht:

Die Winkel ABC, BCA, CAB dieses Dreyecks.

Auflö-

Auflösung.

1) Man beschreibe mit der kleinsten Seite BC einen Kreis CDFC, welcher AC in C und D, und AB in E schneidet;

2) Verlängere hierauf AB bis sie diesen Kreis in H trift;

So ist

$$AH = AB + BH$$

Aber

$$BH = BC \text{ (1. Aufl. und Geom. 12. Erkl.)}$$

Folglich

$$\text{I) } AH = AB + BC;$$

Ferner:

$$AE = AB - BE$$

und

$$BE = BC \text{ (12. Erkl.)}$$

Also

$$\text{II) } AE = AB - BC$$

Nun ist

$$AC : AH = AE : AD \text{ (16. E.)}$$

d. i.

$$AC : (AB + BC) = (AB - BC) : AD \text{ (I, II.)}$$

daher

$$\text{III) } AD = \frac{(AB + BC)\,(AB - BC)}{AC}$$

$$= \frac{AB^2 - BC^2}{AC} \text{ (Ar. II. 5, III. Ex.)}$$

Also AD bekannt, und dadurch auch

$$\text{IV) } CD = AC - AD,$$

$$= AC$$

$$= AC - \frac{AB^2 - BC^2}{AC} \quad \text{(III)}$$

$$= \frac{AC^2 - AB^2 + BC^2}{AC}$$

Aus B lasse man ein Loth BG auf AC herab, welches DC halbirt (Geom. 17. S.) daß also

$$\text{V)}\quad DG = GC = \tfrac{1}{2} DC,$$

$$= \frac{AC^2 - AB^2 + BC^2}{2 \cdot AC}$$

und

$$\text{VI)}\quad AG = AD + DG = AD + \tfrac{1}{2} DC$$

$$= \frac{AB^2 - BC^2}{AC} + \tfrac{1}{2} \times \left(\frac{AC^2 - AB^2 + BC^2}{AC}\right) \text{[III, IV]}$$

$$= \frac{2(AB^2 - BC^2) + AC^2 - AB^2 + BC^2}{2\,AC}$$

$$= \frac{2AB^2 - 2 \cdot BC^2 + AC^2 - AB^2 + BC^2}{2\,AC}$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AC}$$

Nun setze man AB = c
BC = a
AC = b

so hat man

$$\text{VII)}\quad AG = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}$$

$$\text{VIII)}\quad GC = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b} \quad \text{(V)}$$

Aber in dem rechtwinklichten Dreyecke BGA ist vermöge 3. Satzes

$$AB : AG = r : \text{Cof } A$$

Also

$$\text{IX)}\quad \text{Cof } A = \frac{AG \times r}{AB}$$

$$= \frac{r \,.\, (c^2 + b^2 - a^2)}{2 \,.\, bc} \quad \text{(VII)}$$

Man erhält also den Cosinus des Winkels A, wenn man jede der gegebenen drey Seiten quadrirt, und von der Summe der Quadrate der Seiten die den Wirkel A einschliessen, das Quadrat der dritten Seite abzieht, diese Differenz mit dem Halbmesser der Tafeln multiplicirt, und dieses Product, durch das doppelte Product der den Winkel A einschliessenden Seiten dividirt.

Ferner im rechtwinklichten Dreyecke BGC

$$BC : GC = r : \text{Cof } C$$

Folglich

$$\text{X)}\quad \text{Cof } C = \frac{r \,.\, GC}{BC}$$

$$= \frac{r\,(b^2 - c^2 + a^2)}{2\,ab} \quad \text{(VIII)}$$

$$= \frac{r\,(b^2 + a^2 - c^2)}{2\,ab}$$

Diese Formel in Worten ausgedruckt lautet eben so, wie für die in IX).

Dieß alles stimmt mit den noch folgenden 20. Satz, und daſ. 10, überein.

Nachdem man so A und C gefunden hat, darf man nur

$$2\,(R - (A + C)$$

(Geom. 13. S.) machen, um den Winkel ABC zu finden.

Aber die Formel IX) giebt zugleich sin ABG, weil dieser = Cos A; die Formel X) den Sinus von GBC, weil dieser = Cos C; und

$$ABG + GBC = ABC$$

Will man also das Exempel im Buche nach diesen Formeln berechnen, so hat man

$$a = 7$$
$$b = 11$$
$$c = 9$$

und

$$\text{Cos A,} = \text{sin ABG,} = \frac{r(9^2 + 11^2 - 7^2)}{2 \cdot 11 \cdot 9}$$

$$= \frac{r\,(81 + 121 - 49)}{2 \cdot 99}$$

$$= \frac{r(81 + 72)}{198}$$

$$= \frac{r \cdot 153}{198}$$

$$= \frac{10000000 \cdot 153}{198}$$

Folglich:

log Cos A, = log sin ABG, =
log 10000000 + log 153 — log 198

Aber

log 10000000 = 10, 0000000
log 153 = 2, 1846914

12, 1846914

log 198 = 2, 2966652

Also

log Cos A, = log sin ABG = 9, 8880262

Dieser giebt A = 39° 24′; ABG = 50° 36′

Eben so erhält man

$$\text{Cos C, } = \text{sin GBC, } = \frac{10000000 \cdot 89}{154}$$

Also

log Cos C, = l sin GBC, =
log 10000000 + log 89 — l 154

und

log 10000000 + log 89 = 11, 9493900
log 154 = 2, 1875207

Folglich

1 Cof C, = 1 ſin GBC, = 9, 7618693,

welcher

C = 54° 42′, und
CBM = 35° 18′,

giebt: Alſo hat man

ABC = 50° 36′ + 35° 18′ = 85° 54′.

Und

39° 24′ + 85° 54′ + 54° 42′; (= A + ABC + C;)

iſt

= 180°.

17. Satz. Anmerkung.

Kurze Ueberſicht der bisherigen trigonometriſchen Aufgaben und Auflöſungen in Formeln.

1) Für die rechtwinklichten Dreyecke.

Hier bedeute

h die Hypothenuſe,
p der eine Cathete,
b der andere oder die Grundlinie,
π der p entgegenſtehende Winkel,
β der b gegenüberliegende Winkel.

Nun ſey

gegeben	werde geſucht	Auflöſung.
1) h; p	π, β, b	$\sin \pi = \frac{r \cdot p}{h} = \mathrm{Cof}\,\beta$ (3. S.) $b = \sqrt{(h^2 - p^2)}$ [S. 15. S.]

gegeben	werde gesucht	Auflösung.	
2) h, b,	π, β, p	$\sin\beta = \frac{r \cdot b}{h} = \mathrm{Col}\,\pi$ $p = \sqrt{(h^2 - b^2)}$ [G. 15 S.]	[3. S.]
5) h, π	β, p, b	$\beta = 90° - \pi$ $p = \frac{h \sin\pi}{r}$ $b = \frac{h \cdot \mathrm{Col}\,\pi}{r}$	(5. S.)
4) h; β	π, p, b	$\pi = 90° - \beta$ $b = \frac{h \sin\beta}{r}$ $p = \frac{h \mathrm{Col}\,\beta}{r}$	(5. S.)
3) p, b	h, π, β	$h = \sqrt{(p^2 + b^2)}$ [G. 15. S.] $\mathrm{tang}\,\pi = \frac{r \cdot p}{b} = \mathrm{Cot}\,\beta$	(4. S.)
6) p, β	π, h, b	$\pi = 90° - \beta$ $h = \frac{r \cdot p}{\mathrm{Col}\,\beta}$ $b = \frac{p \cdot \mathrm{tang}\,\beta}{r}$	(6. S.)

gegeben

gegeben	werde	Auflösung.	
7) b, π	gesucht β, h, b	$\beta = 90° - \pi$ $h = \frac{r \cdot b}{\operatorname{Col} \pi}$ $p = \frac{b \cdot \operatorname{tang} \pi}{r}$	(6. S.)
8) p, π	β, h, b	$\beta = 90° - \pi$ $h = \frac{r \cdot p}{\sin \pi}$ $b = \frac{p \cdot \operatorname{Cot} \pi}{r}$	(6. S. 1. An.)
9) b, β	π, h, p	$\pi = 90° - \beta$ $h = \frac{r \cdot b}{\sin \beta}$ $p = \frac{b \cdot \operatorname{Cot} \beta}{r}$	(6. S. 1. An.)

II) Für die gleichschenklichten Dreyecke.

Hier bedeute

b die Grundlinie,

β der ihr entgegenstehende Winkel,

a einer der gleichen Schenkeln,

α ein Winkel an der Grundlinie.

Es sey gegeben	werde gesucht	Auflösung.
1) b, a	β, α	$\sin\frac{1}{2}\beta = \frac{r \cdot \frac{1}{2}b}{a}$ (8. S. I.) $= \mathrm{Col}\,\alpha$
2) b, β	a, α	$\frac{r \cdot \frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\beta}$ (8. S. II.) $\alpha = R - \frac{1}{2}\beta$ (G. 13 S. 53.)
3) β, a,	α, b	$\alpha = R - \frac{1}{2}\beta$ $b = \frac{2a\sin\frac{1}{2}\beta}{r}$

III) Für die ungleichseitigen Dreyecke.

Bedeute

a, b, c } dessen Seiten

α der a, β der b, γ der c } entgegenstehende Winkel;

und sey

gegeben	werde gesucht	Auflösung
1) c, α, β	γ, a, b	$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$ $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$ (11. S.)

gegeben

gegeben	werde gesucht	Auflösung
2) a, c, α	γ, β, b	$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$ (12. S.) $\beta = 2R - (\alpha+\gamma)$ [12 S. Z.] $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$
3) b, c, α	β, γ, a	$\tan g\frac{1}{2}(\beta-\gamma) = \frac{(b-c)\tan g\frac{1}{2}(\beta+\gamma)}{b+c} = \frac{(b-c)\tan g\frac{1}{2}(R-\alpha)}{b+c}$ (15 S.) und $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)+\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\beta$ $\frac{1}{2}(\beta+\gamma)-\frac{1}{2}(\beta-\gamma)=\gamma$ $a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$ (15. S. Z.)
4) a, b, c	α, β, γ,	$\mathrm{Cof}\,\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \cdot r$ $\mathrm{Cof}\,\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \cdot r$ (17 S) γ wird durch α und β mit gefunden. Und so findet man die Winkel nach dem 17. Satze. Dieß kann auch durch die Formel

4) a, b, c	α, β, γ	s. α = r. [√ ([a+b+c]. [b+c—a] . [a+b—c]. [a+c—b])]: 2 bc

geschehen, welche im 20. Satze und das. 15. steht; nur ist dorten r = 1 angenommen.

Man kann sich auch hiezu die Formel

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = r\,(\sqrt{(a+c-b)}\,.\,(b+c-a)) : \sqrt{2cb}$$

bedienen. Sie steht (für r = 1) unter andern in unsers Herrn Autors astronom. Abhand. II. Samml. S. 122.

18. Satz.

Gegeben:

AK, = a, der Halbmesser des Kreises, worein ein ordentliches Vieleck, (Fig. 77. Geom.) beschrieben ist;

n, die Anzahl der Seiten dieses Vielecks:

Gesucht:

AB = b des ordentlichen Vielecks Seite.

Auflösung.

Das Dreyeck AKB ist gleichschenklicht (Geom. 23. S. 2. B.)

Heißt man nun den Mittelpunctswinkel AKB = v; so ist (vermöge 8. S. III.)

AB =

$$AB = \frac{2 \cdot AK \cdot \sin \frac{1}{2} v}{r}$$

oder, a statt AK, und b statt AB gesezt,

$$b = \frac{2a \cdot \sin \frac{1}{2} v}{r}$$

Weil aber die Zahl der Seiten des Vielecks, $= n$, so hat man

$$v = \frac{360°}{n}$$ (Geom. 23. S. 3. Z.)

Also:

$$\sin \tfrac{1}{2} v = \sin \frac{360°}{2n}$$

$$= \sin \frac{180°}{n}$$

Folglich auch

$$2a \sin \frac{180°}{n}$$

$$b = \frac{}{r}$$

wo $\frac{180°}{n} = \frac{1}{2} v$.

Wäre $a = r$; so hätte man

$$b = 2 \sin \frac{180°}{n}$$

18. Satz. 1. Zusatz.

Da

$b =$

$$b = \frac{2\,a \sin \frac{1}{2} v}{r}$$

so ist

$$r \cdot b = 2\,a \sin \tfrac{1}{2} v$$

und

$$\frac{r\,b}{2 \sin \frac{1}{2} v} = a.$$

Hieraus läßt sich z. E. des 23. S. 6. Z. der G. so auflösen:

Nach ihm soll man aus der gegebenen Seite b und der Anzahl der Seiten n, ein reguläres Vieleck beschreiben.

Man sieht daß man hiezu den Halbmesser a des Kreises wissen muß, worein sich das Vieleck beschreiben läßt. Diesen aber findet man durch die Formel

$$\frac{r\,b}{2 \sin \frac{1}{2} v},$$

wo

$$\tfrac{1}{2} v = \frac{180^\circ}{n}.$$

Hat man a, so darf man damit nur einen Kreis beschreiben, und darinne b, n mal herum tragen.

Es versteht sich daß a und b nach einerley Maasstab genommen werden müssen.

Vergleicht man das dortge Verfahren, mit diesem, so wird man finden, daß dieses hier in der Ausübung zuverläßiger ist.

18. Satz. 2. Zusatz.

Es sey das Perpendikel

$$KQ = e;$$

so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke AKQ

$$r : \text{Cos}\, AKQ = AK : KQ$$

d. i. (weil Δ AKB gleichschenklicht: daher der Winkel $AKQ = \frac{1}{2} AKB = \frac{1}{2} v$ [G. 9. S. 5. Z.] und $KQ = e$, $AK = a$)

$$r : \text{Cos}\, \tfrac{1}{2} v = a : e$$

Also

$$e = \frac{a \cdot \text{Cos}\, \frac{1}{2} v}{r}$$

und auch, [weil $\frac{1}{2} v = \frac{180}{n}$ (Geom. 23. S. 3. Z.)]

$$e = \frac{a \cdot \text{Cos}\, \frac{180^\circ}{n}}{r}$$

Es darf also ausser dem Halbmesser des Kreises worein das reguläre Vieleck sich beschreiben läßt, nur die Anzahl seiner Seiten bekannt seyn, um das Perpendikel zu bestimmen.

18. Satz. 3. Zusatz.

Des Dreyecks AKB Inhalt

$$= \frac{AB \times KQ}{2} = \frac{e\, b}{2} \text{ (G. 42. S. 15. Z.)}$$

Aber

$$b = \frac{2\, a \sin \frac{1}{2} 2}{r} \text{ (18. S.)}$$

und

und

$$e = \frac{a \operatorname{Cof} \frac{1}{2} v}{r} \text{ (18. S. 2. 3.)}$$

Also:

$$\frac{eb}{2} = \frac{2 a \sin \frac{1}{2} v . a \operatorname{Cof} \frac{1}{2} v}{2 . r . r .}$$

$$= \frac{a^2 \sin \frac{1}{2} v \operatorname{Cof} \frac{1}{2} v}{r^2} \text{ (♀}$$

Nun wird in noch folgenden 19. Satze 5. Zusatze gezeigt, daß

$$\sin 2\varphi = \frac{2 \sin \varphi \operatorname{Cof} \varphi}{r}$$

(Am a. O. ist zwar nicht mit r dividirt, weil dort r = 1 gesetzt, und 1 nicht dividirt)

Sezt man also

$$2\varphi = v$$

oder $$\varphi = \frac{1}{2} v$$

so hat man

$$\sin v = \frac{2 \sin \frac{1}{2} v \operatorname{Cof} \frac{1}{2} v}{r}$$

Folglich

$$\frac{\sin \frac{1}{2} v . \operatorname{Cof} \frac{1}{2} v}{r} = \frac{\sin v}{2}$$

Sezt man nun $\frac{\sin v}{2}$ statt $\frac{\sin \frac{1}{2} v . \operatorname{Cof} \frac{1}{2} v}{r}$ in die Formel bey (♀; so erhält man

be

$$\frac{eb}{2} = \frac{a^2 \sin v}{2r}$$

Ist $a = r$; so ist

$$\frac{eb}{2} = \frac{rr \sin v}{2r}$$

$$= \tfrac{1}{2} r \sin v$$

Nun ist der Inhalt eines ordentlichen Vielecks, der q heissen soll,

$n \times \Delta$ AKB (G. 42. S. 17. Z.)

Also:

$$q = n \frac{eb}{2}$$

$$= \frac{n a^2 \sin v}{2r}$$

Folglich, wenn $a = r$;

$$q = n \cdot \tfrac{1}{2} r \cdot \sin v$$

$$= \tfrac{1}{2} r \cdot n \cdot \sin v$$

Wenn π. (S. Buch.)

18. Satz. 4. Zusatz.

Wenn eines andern ordentlichen Vielecks

Inhalt $= Q$
Zahl der Seiten $= N$
Mittelpunctswinkel $= V$

so ist

$$Q = N \cdot \tfrac{1}{2} r \cdot \sin V$$

daher

$$q : Q = n \cdot \tfrac{1}{2} r \sin v : N \cdot \tfrac{1}{2} r \sin V$$
$$= n \cdot \sin v : N \cdot \sin V$$

18. Satz. 4. Zusatz. Exempel.

Wenn

$$n = 4,$$
$$N = 12;$$

so ist

$$v = \frac{360°}{n}$$
$$= \frac{360°}{4}$$
$$= 90°;$$
$$V = \frac{360°}{N}$$
$$= \frac{360°}{12},$$
$$= 30°$$

Aber

$$\sin 90° = r,$$

und

$$\sin 30° = \tfrac{1}{2} r$$

Also ꝛc. (S. B. bis 2 : 3)

oder . . . . . Kreise]

Es versteht sich von der Fläche beyder Vielecke.

Wenn also in einem und demselben Kreise ein ordentliches Viereck und Zwölfeck beschrieben wäre; so wäre jenes Fläche $\frac{2}{3}$ der Fläche des Zwölfecks.

18. Satz. 5. Zusatz.

Wenn

$$V = \tfrac{1}{2} v,$$

oder

$$2\,V = v$$

so darf man nur in des 19. S. 5. Zusatz V statt Φ setzen, so wird man

$$\sin 2\,V, (= \sin v,) = 2 \sin V \operatorname{Cos} V$$

erhalten;

Will man nun diese Formel hier gebrauchen; so muß man sie noch durch r dividiren, weil hier sin v für den Halbmesser r dort aber für den Halbmesser 1 gehört; daher bekommt man hier

$$\sin v = \frac{2 \sin V \operatorname{Cos} V}{r}$$

und also

$$q : Q = n , \frac{2 \sin V \operatorname{Cos} V}{r} : 2\,n , \sin V$$

$$= 2\,n \sin V \frac{\operatorname{Cos} V}{r} : 2\,n \sin V$$

$$= \frac{\operatorname{Cos} V}{r} : 1 \text{ (Ar. V, 21)}$$

$$= \operatorname{Cos} V : r$$

18. Satz. 5. Zusatz. Exempel.

... oder ..... Sechsecks].

Es versteht sich daß beyde, das gleichseitige Δ und reguläre Sechseck, in einem Kreise beschrieben sind, und von ihrem Flächeninhalte die Rede ist.

Wer übrigens den 4. und 5. Zusatz wohl gefaßt hat, wird dadurch leicht andere Vielecke, ob-

gleich mit etwas weitläuftiger Rechnung vergleichen können; welches ich daher Anfängern zur Uebung überlasse.

Anwendung der Trigonometrie auf die praktische Geometrie.

Die . . . . . man so:]

Die Aufgabe heißt:

Eine Weite AB (89. Fig.) zu finden die man unmittelbar nicht messen kann.

Bey dieser Aufgabe finden drey Fälle statt, welche im 38. S. der Geometrie angeführt sind. Der dortge dritte Fall, löst sich nun mittelst des Astrolabii und trigonometrischen Rechnung, so:

Man messe die Standlinie CD; dann aus C mit dem Winkelmesser die Winkel ACD, BCD, und aus D die Winkel ADC, CDB;

So wird sich die Weite AB folgendermaßen finden lassen.

Man nenne die gefundenen Winkel

$ACD = \beta$
$BCD = \alpha$
$CDA = \gamma$
$CDB = \delta$

die Standlinie

$CD = m.$

Nun suche man

I) Im Dreyecke ACD aus den beyden Winkeln β, γ, und der Standlinie m, die Seite DA.

Dieß geschieht so: Da der Winkel $CAD = 180° - (\beta + \gamma)$ also bekannt; so ist, verm. 11. S.

$$\sin CAD : \sin \beta = m : AD$$

daher

$$AD = \frac{m \cdot \sin \beta}{\sin CAD}$$

II) Desgleichen im Δ BDC aus m, δ, α, die Seite DB.

Weil der Winkel

$$CBD = 180° - (\alpha + \delta)$$

so ist

$$\sin CBD : \sin \alpha = m : BD \text{ (11. S.)}$$

folglich

$$BD = \frac{m \cdot \sin \alpha}{\sin CBD}$$

III) Im Δ DAB aus DA, DB und dem Winkel ADB die übrigen Winkel DAB, ABD.

Dieß kann nach dem 15. Satze so bewerkstelliget werden:

$$ADB = CDB - ADC$$
$$= \delta - \gamma$$

also bekannt, wie

$$DAB + DBA = 180° - ADB$$
$$= 180° - (\delta + \gamma).$$

Man nenne nun dieser Winkel DAB, DBA, halbe Summe S und halbe Differenz Φ, folglich

$$S = \frac{180° - ADB}{2} = 90° - \tfrac{1}{2} ADB$$

so hat man

$$DA + DB : DA - DB = \text{tang } S : \text{tg } \Phi$$

Also

$$\text{tg } \Phi = \frac{DA - DB}{DA + DB} \text{ tang } S$$

$$= \frac{DA - DB}{DA + DB} \text{ Cot } \tfrac{1}{2} ADB$$

(weil $\frac{1}{2}$ ADB des S. Ergänz. zu 90° ist)

In dieser Formel ist DB, DA ADB bekannt (I, II, III.)

Ist nun AD die größere Seite, so ist der W.

$$DBA > DAB$$

und daher

$$DBA = S + \Phi \text{ (13. S.)}$$
$$= 90° - \tfrac{1}{2} ADB + \Phi$$
$$= 90° - (\tfrac{1}{2} ADB - \Phi)$$

Folglich auch bekannt.

Daher sucht man

IV) In dem Δ ADB aus den gefundenen Seiten und Winkeln die Seite AB.

Es ist aber

$$\text{sin } DBA : \text{sin } ADB = DA : AB$$

Also

Also die Weite

$$AB = \frac{DA \cdot \sin ADB}{\sin DBA} \text{ (15. S. 3.)}$$

Oder, [da $\frac{1}{2}$ ADB — Φ des Winkels DBA Ergänzung zu 90° ist, daher $\sin DBA = \mathrm{Cof}(\frac{1}{2} ADB - \Phi)$ (3. Erkl.)]

$$AB = \frac{DA \cdot \sin ADB}{\mathrm{Cof}(\frac{1}{2} ADB - \Phi)}$$

und auch, [weil $\frac{1}{\mathrm{Cof}(\frac{1}{2} ADB - \Phi)} = \mathrm{sec}(\frac{1}{2} ADB - \Phi)$, wie gleich aus 4. Erkl. 5. Zus. erhellet, wenn man dort $r = 1$ sezt]

$$AB = DA \sin ADB \mathrm{sec}(\tfrac{1}{2} ADB - \Phi)$$

welche leztere Formel brauchbar ist, wenn man Tafeln für die Sekanten hat.

Daß und wie die Rechnung mit Logarithmen bewerkstelliget werden kann, ist offenbar.

Uebrigens lese man Herrn Prof. Meyers schon mehrmaln angeführte practische Geometrie II. Th. S. 227 u. f.

— Auch Herrn Geh. Böhms gründliche Anleitung zur Meßkunst auf dem Felde ꝛc. zweyte Aufl. §. 45.

Anwendung der Buchstabenrechnung allgemeine trigonometrische Lehrsätze zu finden.

Vorerinnerung 2.

So ist . . . . . r . sin x]

Weil nach dem 2. Satze

$$r : \sin \text{tab } x = 1 : \sin x;$$

oder in der 3. Figur

$$C\delta : \delta\varepsilon = DC : DE \ (1)$$

Vorerinnerung 5.

Aus (2) hat man

$$\log \sin x = \log \text{tab tab } x - \log r$$

Da aber

$$r = 10\,000\,000 \ (4)$$

so ist

$$\log \sin x = \log \text{tab} \sin x - \log 10\,000\,000$$
$$= \log \text{tab} \sin x - 10 \ (2.\ S.\ 2.\ An.)$$

Von dem Logarithmen also, der in Tafeln einem ꝛc. (S. Buch).

Vorerinnerung 6.

Man erspart sich jedes ꝛc.]

Man nimmt nämlich von der 10 allemal so viel weg, als die Kennziffer des Tafellogarithmen eines Sinus beträgt, was übrig bleibt, sezt man hinter diesen Logarithmen mit dem Zeichen (—), und in die Stelle seiner Kennziffer die 0.

So ist im Exempel im Buche von der 10 die Kennziffer 6 des log tab sin 1′ weggenommen, in

die

die Stelle dieser Kennziffer 0 und nun hinter der Mantisse dieses Logarithmen, — 4 gesezt worden.

Will man aus dem Logarithmen eines Sinus für den Halbmesser 1 den Logarithmen haben, welcher dieses Winkels Sinus für der Tafeln Halbmesser zugehört, so muß man zu ihm 10 addiren; weil

$$\begin{aligned} \log \text{tab sin } x &= \log (r \sin x) \\ &= \log r + \sin x \\ &= 10 + \log \sin x. \end{aligned}$$

So findet man aus

$$\log \sin 1' = 0,4637261 - 4$$

den

$$\begin{aligned} \log \text{tab sin } 1' &= 0,4637261 - 4 + 10 \\ &= 6,4637261; \end{aligned}$$

wie gehörig.

Vorerinnerung 8.

Man verstehe . . . . . nennt]

Daß allemal dieß zu verstehen sey, wenn für die Winkel auch andere Buchstaben gebraucht werden, ist kaum zu erinnern.

So ist jede . . . . . mit r, dividirt]

Nach dem 2. Satze ist nämlich

$$\text{tang } x = \frac{\text{tang tab } x}{r}$$

$$\text{sec } x = \frac{\text{sec tab } x}{r}$$

$$\text{Cotang } x = \frac{\text{Cotang tab } x}{r}$$

u. ſ. w.

und alſo

$$\text{tang tab } x = r \cdot \text{tang } x$$
$$\text{ſec tab } x = r \cdot \text{ſec } x$$

u. ſ. f.

Vorerinnerung 9.

Alle dieſe Quotienten erhält man (wie ſchon aus Erl. des 3. u. 4. S. bekannt) aus Proportionen, wo das eine Paar Glieder, Seiten des rechtwinklichten Dreyecks in ihrer eigenthümlichen Bedeutung genommen, das andere aber eben die Seiten in ihrer trigonometriſchen, ſind, wobey aber der Sinus totus = 1 geſezt.

Es iſt alſo

$$\text{I) } CD : DE = 1 : \text{ſin } y$$

Alſo

$$\frac{DE}{CD} = \text{ſin } y$$

Oder:

Wenn man in einem rechtwinklichten Dreyecke, den einen Catheten durch die Hypothenuſe dividirt, ſo giebt der Quotiente des dieſem Catheten gegenüberſtehenden Winkels Sinus für den Halbmeſſer = 1;

Hieraus hat man

$$DE = DE \text{ ſin } y$$

oder:

Den einen Catheten findet man, wenn man seines gegenüber stehenden Winkels Sinus für den Halbmesser 1, in die Hypothenuse multiplicirt.

II) $CD : CE = 1 : \text{Cos } y$

Also

$$\frac{CE}{CD} = \text{Cos } y$$

Oder:

Den Catheten CE durch die Hypothenuse dividirt, giebt für den Halbmesser 1 den Cosinus des an ihm liegenden Winkels.

Hierdurch hat man

$$CE = CD \,.\, \text{Cos } y$$

Oder:

Das Product der Hypothenuse in eines schiefen Winkels Cosinus für den Halbmesser 1, giebt den an diesem Winkel anliegenden Catheten.

III) $CE : DE = 1 : \text{tang } x$

Folglich

$$\text{tang } y = \frac{DE}{CE}$$

Also:

Das Perpendikel, DE, durch die Grundlinie, CE, dividirt, giebt des dem Perpendikel gegenüber stehenden Winkels Tangente für den Sinus totus = 1

Hieraus folgt

$$DE = CE \text{ tang } y$$

Oder:

Man erhält das Perpendikel, DE, wenn man seines gegenüber stehenden Winkels Tangente für den Halbmesser = 1, in die Grundlinie multipliciret.

IV) $CE : CD = 1 : \sec y$

Folglich

$$\sec y = \frac{CD}{CE}$$

Also

Die Hypothenuse durch den einen Catheten dividirt, giebt des an ihm liegenden Winkels Sekante für den Halbmesser = 1.

Hieraus folgt:

$$CD = CE \cdot \sec y$$

Oder:

Das Product des einen Catheten in seines anliegenden Winkels Sekante (welche den Sinus totus = 1 gehört) ist gleich der Hypothenuse.

Vorerinnerung 18.

Für Tangenten und Sekanten unter 45° ist die Kennziffer ihrer Tafellogarithmen kleiner als 10, (4. Erkl.)

Wenn man also von einer solchen Tangente Logarithmen 10 abzieht, um den Logarithmen dieser

Linie

Linie für den Halbmesser 1 zu erhalten: so bekäme man einen verneinten Logarithmen.

Man entgeht aber diesem Verneinten, wenn man wie im 6. dieser Vorerin. verfährt.

Z. E.

$$\log \text{tang tab } 41° = 9,9391631$$

Also

$$\log \text{tang } 41° = 9,9391631 - 10$$
$$= 0,9391631 - 1.$$

19. Satz.

Nun: Für I. ꝛc.]

1) Unmittelbar gegeben sind hier der

Halbmesser $CA = r$

und für diesen

BE oder sin AB, $= m$,
CE oder Cosin $AB = \mu$,
DF oder Sin $AD = s$,
CF oder Cosin $AD = \sigma$;

Gesucht wird

DG oder sin BD ($=$ sin [$AD -$ AB]) $= d$.

2) Da BE, DF, DG, Sinusse (wie angenommen); so sind die Dreyecke BEC, FIC, DIG bey E, F, G rechtwinklicht (1. Erkl. und Geom. 9. S. 3. Z.):

Daher in diesen Dreyecken

W. $BEC = IFC = DGI$ (G. 5. Grundf.)

EBC

$EBC = FIC = GID$ (G. 12. S. 2. Z. und 8. S. 4. Z.)

$BCE = ICF = GDI$ (G. 13. S.)

Also:

$\Delta BEC \sim \Delta IFG \sim GDI$ (26. S.)

3) Folglich:

$CI : CF = DI : DG$

und

$CI : CF = CB : CE$

Also:

$CB : CE = DI : DG$ (Ar. I. 87.)

4) In dieser lezten Proportion wodurch sich

$$DG = \frac{CE}{CB} DI$$

findet, sind die beyden lezten Glieder unbekannt. Das dritte DI aber findet man so:

5) Es ist

$DI = DF - IF$

wo DF bekannt (1) hingegen nicht IF;

6) Aber IF findet sich durch die Proportion

$CE : EB = CF : IF$ (2)

wo die drey ersten Glieder bekannt sind (1).

7) Also hat man dadurch

$$IF = \frac{EB \cdot CF}{CE}$$

8) Folglich

DI =

$$DI = DF - \frac{EB \cdot CF}{CE} \quad (5, 7)$$

9) Nun brauche man die Buchstaben (1) die zur Rechnung bequemer sind.

Man setze daher in die Gleichungen (4, 7, 8.)

r für CB
m für EB;
σ für CF
μ für CE
s für DF

10) So erhält man

$$IF = \frac{\sigma \cdot m}{\mu} \quad (7)$$

$$DI = s - \frac{m \cdot \sigma}{\mu} \quad (8)$$

und folglich aus 4)

$$DG = \frac{\mu}{r} \cdot \left(s - \frac{m\sigma}{\mu}\right)$$

Oder, wenn man wirklich multiplicirt

$$DG = \frac{\mu s}{1} - \frac{\mu \cdot m\sigma}{\mu \cdot r}$$

$$= \frac{\mu s}{r} - \frac{m\sigma}{r}$$

10) Also

$$DG \text{ oder } d = \frac{\mu s - m\sigma}{r} \quad (\text{Ar. I. } 73.)$$

Die Regel ꝛc. (S. Buch.)

Für

Für II. Sind nebst ꝛc.]

11) Hier sind nebst dem Halbmesser r, = CB, = CA

BE oder sin AB, = m
CE oder Cosin AB = μ
DG oder sin DB = d
CG oder Cosin DB = δ

gegeben. Es wird gesucht:

DF oder sin DA (= sin [AB + BD]) = s

12) Diese gesuchte Größe besteht aus zwey Stücken DI, IF; welche man einzeln zu suchen, und dann zusammen zu addiren hat.

13) Nun ist

$$\left.\begin{array}{l} CF : CI = DG : DI \\ CF : CI = CE : CB \end{array}\right\} (2)$$

Folglich

CE : CB = DG : DI (Ar. I. 87.)

14) Also:

$$DI = \frac{CB \,.\, DG}{CE},$$

das eine Stück der gesuchten Größe, durch gegebene Größen (11) gefunden.

15) Ferner ist

$$\left.\begin{array}{l} CF : FI = DG : GI \\ CF : FI = CE : EB \end{array}\right\} (2)$$

Folglich:

CE : EB = DG : GI (Ar. I. 87.)

16)

16) Also

$$GI = \frac{EB \cdot DG}{CE}$$

wo die Größen rechter Hand gegeben sind (11).

17) Folglich auch in

$$CI = CG - GI;$$

18) Nun ist

$$CB : BE = CI : IF$$

Mithin

$$IF = \frac{BE \cdot CI}{CB},$$

das andere Stück der gesuchten Größe bekannt. (17, 16, 11)

19) Man setze nun in die in (14, 16, 17, 18) gefundene Ausdrücke für dasigen Größen die ihnen nach (11) gehörigen Buchstaben;

20) So hat man (in 14)

$$DI = \frac{r \cdot d}{\mu}.$$

21) Ferner (in 16)

$$GI = \frac{md}{\mu};$$

und (in 17)

$$CI = \delta - GI$$

$$= \delta - \frac{md}{\mu}$$

22) Also (in 18)

$$IF = \frac{m}{r} . CI$$

$$= \frac{m}{r}\left(\delta - \frac{md}{\mu}\right) [21]$$

$$= \frac{m\delta}{r} - \frac{mmd}{r\mu}$$

23) Folglich

$$DI + IF = \frac{rd}{\mu} + \frac{m\delta}{r} - \frac{mmd}{r\mu} (20, 22)$$

$$= \frac{m\delta}{r} + \frac{rd}{\mu} - \frac{mmd}{r\mu}$$

24) Weil

$$\frac{rd}{\mu} = \frac{r}{r} \cdot \frac{rd}{\mu}$$

$$= \frac{rrd}{r\mu};$$

So wird in der Formel (23) der Theil

$$\frac{rd}{\mu} - \frac{mmd}{r\mu} = \frac{rrd}{r\mu} - \frac{mmd}{r\mu};$$

$$= \frac{(rr - mm)d}{r\mu} (\text{Ar. I. } 73)$$

Da aber

$$r^2 - m^2 = \mu^2 (3. \text{ Erkl. } 1. \text{ Zus.})$$

So hat man

(rr —

$$\frac{(rr - mm)\,d}{r\mu} = \frac{\mu\mu d}{r\mu}$$

$$= \frac{\mu d}{r}$$

25) Folglich wird nun (in 23)

$$\frac{m\delta}{r} + \frac{rd}{\mu} - \frac{mmd}{r\mu}, = \frac{m\delta}{r} + \frac{\mu d}{r}$$

Also DI + FI oder DG oder

$$s = \frac{m\delta + \mu d}{r}$$

das heißt: Man ꝛc. (S. Buch.)

..... so ist m = ꝛc.]

26) Nach Vorer. 2, und der. Erl. hat man

m oder sin BCD = r . sin α
μ oder Cosin BCD = r . Cosin α
s oder sin DCA = r . sin γ
σ oder Cosin DCA = r . Cosin γ
d oder sin BCD = r . sin β
δ oder Cosin BCD = r . Cosin β

27) Also verwandelt sich die Gleichung (10)

$$d = \frac{\mu s - m\sigma}{r}$$

in

$$r . \sin\beta = \frac{r\,\mathrm{Cos}\alpha . r \sin\gamma - r\sin\alpha . r\,\mathrm{Cos}\gamma}{r}$$

$$= \frac{rr \,.\, \mathrm{Cof}\,\alpha \sin\gamma - rr \,.\, \sin\alpha \,\mathrm{Cof}\,\gamma}{r}$$

$$= r\,\mathrm{Cof}\,\alpha \sin\gamma - r \sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\gamma$$
$$= r\,(\mathrm{Cof}\,\alpha \sin\gamma - \sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\gamma)$$

28) Folglich

$$\sin\beta = \mathrm{Cof}\,\alpha \sin\gamma - \sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\gamma$$

Da aber

$$BCD = DCA - BCA$$

alſo

$$\beta = \gamma - \alpha$$

ſo hat man für

1) $\sin(\gamma - \alpha) = \sin\gamma\,\mathrm{Cof}\,\alpha - \mathrm{Cof}\,\gamma \sin\alpha$;

29) Ferner, wird nun aus der Gleichung (25)

$$s = \frac{m\delta + \mu d}{r}$$

die

$$r\sin\gamma = \frac{r\sin\alpha \,.\, r\,\mathrm{Cof}\,\beta + r\,\mathrm{Cof}\,\alpha \,.\, r\sin\beta}{r}$$

$$= \frac{rr\,(\sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta + \mathrm{Cof}\,\alpha\sin\beta)}{r}$$

$$= r\,(\sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta + \mathrm{Cof}\,\alpha\sin\beta)$$

30) Alſo

$$\sin\gamma = \sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta + \mathrm{Cof}\,\alpha\sin\beta$$

31) Weil aber

$$DCA = ACB + BCD$$

folglich

$$\gamma = \alpha + \beta;$$

ſo hat man für

II) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \operatorname{Cos}\beta + \operatorname{Cos}\alpha \sin\beta$.

19. Satz. 1. Zusatz.

. . . . denn für den Halbmesser ꝛc.]

1) Hier ist gegeben

$CB = CD = r$
BE oder $\sin AB = m$
CE oder Cosin $AB = \mu$
DF oder $\sin AD = s$
CF oder Cosin $AD = \sigma$

und wird gesucht

CG, der Cosin. von $BD = \operatorname{Cos}(AD - BA) = \delta$

2) Dieser Cosinus besteht ebenfalls aus zwey Stücke, GI, CI, welche man auch einzeln suchen und dann zusammen addiren muß.

3) Es ist aber (nach vor. S. Erl. 15)

$CE : CB = CF : CI$

4) Also

$$CI = \frac{CB \cdot CF}{CE}$$

Folglich, (wenn man die nach r für diese Größen zu setzende Buchstaben braucht,)

$$CI = \frac{r \cdot \sigma}{\mu}$$

5) Nun ist nach des 19. Satzes Erl. 10

$$DI = s - \frac{m\sigma}{\mu}$$

und

$CB : BE = DI : IG$ (19. S. Erl. 2.)

Folglich

$$IG = \frac{BE}{CB} DI$$

$$= \frac{m}{r} DI \,(1)$$

$$= \frac{m}{r}\left(s - \frac{m\sigma}{\mu}\right)$$

$$= \frac{ms}{r} - \frac{mm\sigma}{\mu r}$$

6) Also

$$CI + GI \text{ oder } CG = \frac{r\sigma}{\mu} + \frac{ms}{r} - \frac{m^2\sigma}{r\mu} \,(4,5)$$

7) Aber

$$\frac{r\sigma}{\mu} - \frac{r}{r} \cdot \frac{r\sigma}{\mu}$$

$$= \frac{r^2\sigma}{r\mu}$$

Folglich wird (in 6)

$$\frac{r\sigma}{\mu} + \frac{ms}{r} - \frac{m^2\sigma}{r\mu} = \frac{r^2\sigma}{r\mu} + \frac{m\sigma}{r} - \frac{m^2\sigma}{r\mu}$$

$$= \frac{r^2\sigma - m^2\sigma}{r\mu} + \frac{ms}{r}$$

$$= \frac{(r^2 - m^2)\,\sigma}{r\mu} + \frac{ms}{r}$$

=

$$= \frac{\mu^2 \tau}{\mu r} + \frac{ms}{r} \text{ (3. Erkl. 1. Z.)}$$

$$= \frac{\mu\sigma}{r} + \frac{ms}{r}$$

7') Also

$$\delta = \frac{\mu\sigma}{r} + \frac{ms}{r}$$

$$= \frac{\mu\sigma + ms}{r}$$

Hieraus hat man die Regel:

Man mache das Product beyder Bogen Cosinus, und das dieser Bogen Sinus, addire sie zusammen, und dividire diese Summe durch den Halbmesser, der Quotient ist der Cosinus des Unterschieds beyder Bogen.

8) Sezt man nun für diese Größen, (1) die nach vorigen Satzes Erl. 26 ihnen gleiche;

so hat man

$$r.\text{Cos}\beta = \frac{r\,\text{Cos}\alpha.r\,\text{Cos}\gamma + r.\sin\alpha.r\sin\gamma}{r}$$

$$= \frac{rr(\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)}{r}$$

$$= r(\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\gamma + \sin\alpha\sin\gamma)$$

Also

$$\text{Cos}\beta = \text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\gamma + \sin\alpha\sin\gamma$$
$$= \text{Cos}(\gamma - \alpha) \text{ [19. S. Erl. 28]}$$

.... Das Quadrat des Halbmessers kann ꝛc.]

δ aus dem Sinus zu berechnen, muß man sich aus 3. Erkl. 1. Z. erinnern, daß

$$r^2 - d^2 = \delta^2$$

oder, wenn, wie hier, $r = 1$ gesezt wird,

$$\delta^2 = 1 - d^2$$

Aber

$$1 = s^2 + \sigma^2 \text{ (G. 15. S. und 2, 3. Erkl.)}$$

und

$$d = \frac{\mu s - m\sigma}{r} \text{ (19. S. I.)}$$

$$= \mu s - m\sigma$$

(weil hier $r = 1$); folglich

$$d^2 = (\mu s - m\sigma)^2$$

$$= \mu^2 s^2 - 2\mu s m\sigma + m^2\sigma^2 \text{ (Arith. IV. 1)}$$

Folglich von

$$1 = s^2 + \sigma^2$$

abgezogen *)

$$d^2 = \mu^2 s^2 - 2\mu s m\sigma = m^2\sigma^2$$

giebt

$$\delta^2 = s^2 - \mu^2 s^2 + 2\mu s m\sigma + \sigma^2 - m^2\sigma^2$$

$$= (1 - \mu^2)s^2 + 2\mu s m\sigma + (1 - m^2)\sigma^2$$

Nun ist nach 3. Erkl. 1. Zus. und der. Erl.

$$1 - \mu^2 = m^2$$

$$1 - m^2 = \mu^2$$

Also

$$\delta^2 = m^2 s^2 + 2\mu s m\sigma + \mu^2\sigma^2$$

Dieser

*) Nach Ar. II. 3.

Dieser Ausdruck ist aber das Quadrat von ms $+ \mu\sigma$, weil man ihn erhält, wenn man ms $+ \mu\sigma$ quadrirt:

Folglich

$$\delta^2 = (ms = \mu\sigma)^2$$

Also

$$\delta = ms + \mu\sigma$$

welches mit (7′) übereinstimmt, wenn man dort, wie hier angenommen, r = 1, sezt.

19. Satz. 2. Zusatz.

In der Figur ist ꝛc.]

1) Hier sind gegeben

CB = r

BE oder sin AB, = m,
CE oder Cos AB = μ
DG oder sin BD = d
CG oder Cos BD = δ;

und wird gesucht

CF, oder Cos AD, = Cos(AB + BD), = σ

2) Nach 19. S. Erl. 3. ist

CB : CE = CI : CF

Also

$$CF = \frac{CE}{CB} \cdot CI$$

$$= \frac{\mu}{r} CI; \text{ (1)}$$

Aber

$$CI = \delta - \frac{md}{\mu} \text{ (19. S. Erl. 21);}$$

Folglich

$$CF = \frac{\mu}{r}\left(\delta - \frac{md}{\mu}\right)$$
$$= \frac{\mu\delta}{r} - \frac{\mu md}{r\mu}$$
$$= \frac{\mu\delta}{r} - \frac{md}{r}$$

3) Mithin

$$\sigma = \frac{\mu\delta - md}{r}$$

Dieß in Worten ausgedruckt, heißt:

Man mache das Product beyder Bogen Cosinus und das beyder Bogen Sinus, addire sie zusammen, und dividire diese Summe durch dem Halbmesser: der Quotient giebt den Cosinus beyder Bogen.

4) Man setze nun für diese Größen (3) die ihnen nach 19. S. Erl. 26, gleich sind; so hat man

$$r.\text{Cos}\gamma = \frac{r\,\text{Cos}\alpha\,.\,r\,\text{Cos}\beta - r\sin\alpha\,.\,r\sin\beta}{r}$$
$$= r\,(\text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

Also

$$\text{Cos}\gamma = \text{Cos}\alpha\,\text{Cos}\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \text{Cos}(\alpha + \beta) \text{ [19. S. Erl. 30]}$$

5) Will

5) Will man diesen Cosinus, wie den vorigen, durch Abziehung seines Sinusquadrats vom Quadrate des Halbmessers finden; so setze man gleichfalls der Kürze wegen $r = 1$, behalte aber die bisher gebrauchten Buchstaben.

Nun ist

$$\sigma^2 = 1 - s^2 \text{ (3. Erkl. 1. Z.)}$$

und

$$1 = \delta^2 + d^2;$$

Aber

$$s = m\delta + \mu d \text{ (19. S. II.)}$$

folglich

$$s^2 = m^2\delta^2 + 2m\delta\mu d + \mu^2 d^2 \text{ (Ar. IV. 1)}$$

Mithin von

$$1 = \delta^2 + d^2$$

abgezogen

$$s^2 = m^2\delta^2 + 2m\delta\mu d + \mu^2 d^2$$

giebt

$$\sigma^2 = \delta^2 - m^2\delta^2 - 2m\delta\mu d + d^2 - \mu^2 d^2$$
$$= (1 - m^2)\delta^2 - 2m\delta\mu d + (1 - \mu^2)d^2$$

Aber

$$1 - m^2 = \mu^2$$

und

$$1 - \mu^2 = m^2;$$

folglich

$$\sigma^2 = \mu^2\delta^2 - 2m\mu\delta d + m^2 d^2$$

Dieß kann nun das Quadrat von

$$\mu\delta - md, \text{ oder von } md - \mu\delta$$

seyn, weil, wenn man beydes quadrirt, einerley erhält, indem entgegengesezte, sonst gleiche Größen, einerley Quadrate geben.

Von diesen beyden Wurzeln, (nämlich $\mu\delta$ — md und md — $\mu\delta$) des gefundenen Quadrats muß eine *) . . . . . Zeichen nimmt.

Der Wurzel $\mu\delta$ — md Theile sind $\mu\delta$ und — md; Verwandelt man nun den $\mu\delta$ in — $\mu\delta$ und den — md in + md oder md, so kommt die andere Wurzel md — $\mu\delta$.

Weil man ꝛc. (S. Buch).

19. Satz. 3. Zusatz.

Aus

$$\text{tang}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta}$$

folgt

$$\text{cotang}(\alpha+\beta)=\frac{1-\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}$$

weil nach 5. Erkl. 1. Zusatz und Vorer. 1.

$$\text{Cotang}\,(\alpha+\beta)=\frac{1}{\text{tang}\,(\alpha+\beta)}$$

19. Satz. 4. Zusatz.

Aus den hier für tang $(\gamma - \alpha)$ gefundenen Werth hat man

Cot

*) S. Buch.

$$\text{Cot}(\gamma - \alpha) = \frac{1 + \text{tg}\,\gamma \cdot \text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\gamma - \text{tg}\,\alpha}$$ (5. Erk. 1. 3.)

19. Satz. 4. Zusatz. Exempel.

$$\ldots\ldots = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big]$$

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \text{ (Ar. I, 65)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

19. Satz. 5. Zusatz.

Der doppelte Bogen, oder $2\Phi = \Phi + \Phi$;

Also

$$\text{I)}\ \sin 2\Phi = \sin(\Phi + \Phi)$$

Sezt man nun in

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\text{Cos}\beta + \text{Cos}\,\alpha \sin\beta$$ (19. S. II.)

$$\alpha = \beta = \Phi;$$

so hat man

$$\sin(\Phi + \Phi) = \sin\Phi\,\text{Cos}\Phi + \sin\Phi\,\text{Cos}\,\Phi$$

Folglich

$$\sin 2\Phi = 2 \sin\Phi\,\text{Cos}\Phi;$$

Ferner:

$$\text{II)}\ \text{Cos}\,2\Phi = \text{Cos}\,(\Phi + \Phi)$$

Aber

Aber

$$\text{Col}(\alpha+\beta) = \text{Col}\,\alpha\,\text{Col}\,\beta - \text{sin}\,\alpha\,\text{sin}\,\beta$$

(19. S. 2. Z.)

Ist nun hier, wie vorhin

$$\alpha = \beta = \Phi;$$

so ist

$$\text{Col}(\Phi+\Phi) = \text{Col}\,\Phi\,\text{Col}\,\Phi - \text{sin}\,\Phi\,\text{sin}\,\Phi$$

Folglich

$$\text{Col}\,2\,\Phi = \text{Col}\,\Phi^2 - \text{sin}\;\Phi^2;$$

und, weil

$$\text{Col}\,\Phi^2 = 1 - \text{sin}\,\Phi^2,$$

so ist auch

$$\text{Col}\,2\,\Phi = 1 - \text{sin}\,\Phi^2 - \text{sin}\,\Phi^2$$
$$= 1 - 2\,\text{sin}\,\Phi^2;$$

überdieß, da

$$\text{sin}\,\Phi^2 = 1 - \text{Col}\,\Phi^2$$

so ist gleichfalls

$$\text{Col}\,2\,\Phi = \text{Col}\;\Phi^2 - (1 - \text{Col}\,\Phi^2)$$
$$= \text{Col}\,\Phi^2 - 1 + \text{Col}\,\Phi^2 \text{ (Ar. I. 98.)}$$
$$= 2\,\text{Col}\,\Phi^2 - 1$$

19. Satz. 6. Zusatz

Im 3. Zusatze $\alpha = \beta = \Phi$ gesezt, giebt

$$\text{tg}(\Phi+\Phi) = \text{tg}\,2\,\Phi = \frac{\text{tg}\,\Phi + \text{tg}\,\Phi}{1 - \text{tg}\,\Phi\,\text{tg}\,\Phi}$$
$$= \frac{2\,.\,\text{tang}\,\Phi}{1 - \text{rang}\,\Phi^2}$$

So ist

$$\text{tang}(2.30^\circ) = \text{tg}\,60^\circ = \frac{2\,.\,\text{tang}\,30^\circ}{1 - \text{tg}^2\,30^\circ}$$

Da

Da aber nach des vor. 4. Zuf. Exempel

$$\text{tang } 30° = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{3};$$

so ist

$$\text{tang } 60° = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}}{1 - (\frac{1}{3}\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$

19. Satz. 8. Zusatz.

Der ganze Bogen ꝛc.]

$$\text{sin } 15° = \sqrt{\frac{1 - \text{Cos } 30°}{2}}$$

Aber

$$\text{Cos } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (3. Erkl. 1. 3.)}$$

Also

$$\text{sin } 15° = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}])}$$

$$\sqrt{=}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}[1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}])}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}.2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}])}$$
$$= \sqrt{(\tfrac{1}{4}[2 - \sqrt{3}])}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{4}}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$$

Wenn man also die Quadratwurzel aus der 3 von der 2 subtrahirt, aus dieser Differenz die Quadratwurzel zieht, und diese mit 2 dividirt; so erhält man den Sinus eines Winkels von 15° für den Halbmesser = 1.

19. Satz. 9. Zusatz.

Da im 5. Zusatze

$$\text{Cof } 2\Phi = 2\,\text{Cof }\Phi^2 - 1;$$

so ist

$$\text{Cof } 2\Phi + 1 = 2\,\text{Cof }\Phi^2;$$

also

$$\text{Cof }\Phi^2 = \frac{1 + \text{Cof } 2\Phi}{2}$$

woraus die Quadratwurzel gezogen, der im Buche angesezte Ausdruck für Cof Φ, kommt.

19. Satz. 10. Zusatz.

Die erste dieser drey ꝛc.]

1) Es ist nämlich

$$\text{tang }\Phi = \frac{\text{sin }\Phi}{\text{Cof }\Phi}$$

Aber

$$\text{sin }\Phi = \sqrt{\frac{1 - \text{Cof } 2\Phi}{2}} \quad (7.\ 3.)$$

$$= \sqrt{}$$

Cof

$$\text{Cof}\,\varphi = \sqrt{\frac{1 + \text{Cof}\,2\varphi}{2}} \quad (9.\ 3.)$$

Also

$$\frac{\sin\varphi}{\text{Cof}\,\varphi} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cof}\,2\varphi}{2}\right)}}{\sqrt{\left(\frac{1 + \text{Cof}\,2\varphi}{2}\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 - \text{Cof}\,2\varphi)}}{\sqrt{(1 + \text{Cof}\,2\varphi)}}$$

2) Folglich

$$\text{tang}\,\varphi = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cof}\,2\varphi}{1 + \text{Cof}\,2\varphi}\right)}$$

3) Ferner: das Quadrat des $\sin\varphi = \frac{1 - \text{Cof}\,2\varphi}{2}$ und das des Cosinus $\varphi = \frac{1 + \text{Cof}\,2\varphi}{2}$

Folglich

$$\frac{\sin\varphi^2}{\text{Cof}\,\varphi^2} = \frac{\frac{1 - \text{Cof}\,2\varphi}{2}}{\frac{1 + \text{Cof}\,2\varphi}{2}}$$

$$= \frac{1 - \text{Cof}\,2\varphi}{2} \times \frac{2}{1 + \text{Cof}\,2\varphi}$$

4) Also

4) Also

$$\text{tang}\,\Phi^2 = \frac{1 - \text{Cof}\,2\,\Phi}{1 + \text{Cof}\,2\,\Phi}$$

5) Aus Vorerinn. 13. ist nach der 4. Erklärung 5. Z.

$$\frac{1}{\text{Cof}\,2\,\Phi} = \text{fec}\,2\,\Phi;$$

Folglich

$$\frac{1}{\text{fec}\,2\,\Phi} = \text{Cof}\,2\,\Phi$$

6) Also ist der Zähler in (4) oder

$$1 - \text{Cof}\,2\,\Phi = 1 - \frac{1}{\text{fec}\,2\,\Phi}$$

$$= \frac{\text{fec}\,2\,\Phi}{\text{fec}\,2\,\Phi} - \frac{1}{\text{fec}\,2\,\Phi}$$

$$= \frac{\text{fec}\,2\,\Phi - 1}{\text{fec}\,2\,\Phi}$$

und der Nenner oder

$$1 + \text{Cof}\,2\,\Phi = 1 + \frac{1}{\text{fec}\,2\,\Phi} \quad (5)$$

$$= \frac{\text{fec}\,2\,\Phi + 1}{\text{fec}\,2\,\Phi}$$

7) Also wird

$$\text{tang } \Phi^2 = \frac{\frac{\text{sec } 2\,\Phi - 1}{\text{sec } 2\,\Phi}}{\frac{\text{sec } 2\,\Phi + 1}{\text{sec } 2\,\Phi}} \quad (4, 6)$$

$$= \frac{\text{sec } 2\,\Phi - 1}{\text{sec } 2\,\Phi + 1}$$

8) Wenn man Zähler und Nenner (in 7) mit sec 2 Φ + 1 multiplicirt, so bleibt der Bruch ungeändert, (Ar. I. 64) und man erhält für den Zähler

$$(\text{sec } 2\,\Phi - 1)(\text{sec } 2\,\Phi + 1) = \text{sec } 2\,\Phi^2 - 1$$

(Ar. II, 5. III. Ex.)

und für den Nenner

$$(\text{sec } 2\,\Phi + 1)(\text{sec } 2\,\Phi + 1) = (\text{sec } 2\,\Phi + 1)^2$$

9) Folglich

$$\text{tang } \Phi^2 = \frac{\text{sec } 2\,\Phi^2 - 1}{(\text{sec } 2\,\Phi + 1)^2}$$

$$= \frac{\text{tang } 2\,\Phi^2}{(\text{sec } 2\,\Phi + 1)^2}$$

weil das Quadrat der Sekante, weniger dem Quadrate des Halbmessers, (hier 1), gleich dem Quadrate der Tangente ist (4. Erkl. 5. B.).

Mithin (auf beyden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen)

$$\text{tang } \Phi = \frac{\text{tang } 2\,\Phi}{\text{sec } 2\,\Phi + 1}$$

welches der 2te der zu Anfange dieses Zusatzes angesezten drey Ausdrücke, ist.

10) Multiplicirt man aber des Bruchs in (7) Zähler und Nenner mit sec 2 Φ — 1; so bleibt er ebenfalls ungeändert (Ar. I. 65.); und man erhält zum Zähler

$$(\sec 2\Phi - 1)(\sec 2\Phi - 1) = (\sec 2\Phi - 1)^2$$

und zum Nenner

$$(\sec 2\Phi - 1)(\sec 2\Phi + 1) = \sec 2\Phi^2 - 1 \text{ (Ar. II. 5)} = \operatorname{tang} 2\Phi^2 \text{ (4. Erkl. 5. Z.)}$$

Folglich, wird nun (in 7)

$$\operatorname{tang}\Phi^2 = \frac{(\sec 2\Phi - 1)^2}{\operatorname{tang} 2\Phi^2},$$

Also

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{\sec 2\Phi - 1}{\operatorname{tang} 2\Phi},$$

der dritte gedachter Ausdrücke.

Aus den beyden leztern lassen sich für tang Φ auch andere herleiten:

Da nämlich

$$\sec 2\Phi = \frac{1}{\operatorname{Cof} 2\Phi} \text{ (4. Erkl. 3. Z.)}$$

und

$$\operatorname{tang} 2\Phi = \frac{\sin 2\Phi}{\operatorname{Cof} 2\Phi} \text{ (4. Erkl. 3. Z.)}$$

So

So ist

$$\frac{\text{tang } 2\Phi}{\text{sec } 2\Phi + 1} = \frac{\frac{\text{sin } 2\Phi}{\text{Cos } 2\Phi}}{\frac{1}{\text{Cos } 2\Phi} + 1}$$

$$= \frac{\frac{\text{sin } 2\Phi}{\text{Cos } 2\Phi}}{\frac{1 + \text{Cos } 2\Phi}{\text{Cos } 2\Phi}} \text{ (Ar. I. 72)}$$

$$= \frac{\text{sin } 2\Phi}{1 + \text{Cos } 2\Phi} \text{ (Ar. I. 78)}$$

Eben so findet sich

$$\frac{\text{sec } 2\Phi - 1}{\text{tang } 2\Phi} = \frac{\frac{1}{\text{Cos } 2\Phi}}{\frac{\text{sin } 2\Phi}{\text{Cos } 2\Phi}}$$

$$= \frac{1 - \text{Cos } 2\Phi}{\text{sin } 2\Phi}$$

19. Satz. 11. Zusatz.

Da nach diesem Zusatze

$$\text{sin}(\alpha + \beta) + \text{sin}(\alpha - \beta) = 2 \text{ sin } \alpha . \text{Cos } \alpha$$
$$\text{sin}(\alpha + \beta) - \text{sin}(\alpha - \beta) = 2 \text{ Cos } \alpha \text{ sin } \alpha$$

so ist

$$\log[\text{sin}(\alpha + \beta) + \text{sin}(\alpha - \beta)] = \log 2 + \log \text{sin } \alpha + \log \text{Cos } \alpha$$

$$\log[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] = \log 2 + \log\sin\beta + \log\mathrm{Cof}\,\alpha$$

19. Satz. 12. Zusatz.

Nach diesem Zusatze hat man

$$\mathrm{Cof}(\alpha-\beta)+\mathrm{Cof}(\alpha+\beta) = 2\,\mathrm{Cof}\,\alpha\,\mathrm{Cof}\beta$$
$$\mathrm{Cof}(\alpha--\beta)-\mathrm{Cof}(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

Also auch

$$\log[\mathrm{Cof}(\alpha-\beta)+\mathrm{Cof}(\alpha+\beta)] = \log 2 + \log\mathrm{Cof}\,\alpha + \log\mathrm{Cof}\,\beta$$
$$\log[\mathrm{Cof}(\alpha+\beta)-\mathrm{Cof}(\alpha-\beta)] = \log 2 + \log\sin\alpha + \log\sin\beta$$

Kurze Uebersicht der für den Halbmesser = 1, im 19. Satze und dessen Zusätzen gefundenen zusammengesezten trigonometrischen Formeln.

1) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta + \mathrm{Cof}\,\alpha\sin\beta$ (19. S.)

2) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta - \sin\beta\,\mathrm{Cof}\,\alpha$ (19. S.)

3) $\mathrm{Cof}(\alpha+\beta) = \mathrm{Cof}\,\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta - \sin\alpha\sin\beta$ (2. Z.)

4) $\mathrm{Cof}-\beta) = \mathrm{Cof}\,\alpha\,\mathrm{Cof}\,\beta + \sin\alpha\sin\beta$ (1. Z.)

5) $\mathrm{tang}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tang}\,\alpha+\mathrm{tang}\,\beta}{1-\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}$ (3. Z.)

6) $\mathrm{tang}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tang}\,\alpha-\mathrm{tang}\,\beta}{1+\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}$ (4. Z.)

7) $\mathrm{Cot}(\alpha+\beta) = \dfrac{1-\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\beta}{\mathrm{tang}\,\alpha+\mathrm{tang}\,\beta}$ (3. Z. Erl.)

8) Cot

8) $\operatorname{Cot}(\alpha - \beta) = \frac{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta}$ (4. Z. Erl.)

* * *

9) $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \operatorname{Cos}\alpha$
10) $\operatorname{Cos} 2\alpha = 1 - \sin\alpha^2 = 2\operatorname{Cos}\alpha^2 - 1$ (5. Z.)

11) $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\alpha}{1 - \operatorname{tang}\alpha^2}$
12) $\operatorname{Cot} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tang}\alpha^2}{2 \operatorname{tang}\alpha}$ (6. Z.)

* * *

13) $\sin\alpha = \sqrt{[\frac{1}{2}(1 - \operatorname{Cos} 2\alpha)]}$ (7. Z.)
14) $\operatorname{Cos}\alpha = \sqrt{(\frac{1}{2}[1 + \operatorname{Cos} 2\alpha])}$ (9. Z.)

15) $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\operatorname{sec} 2\alpha + 1} = \frac{\operatorname{sec} 2\alpha - 1}{\operatorname{tang} 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \operatorname{Cos} 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{Cos} 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ (10. Z.) (10. Z. Erl.)

16) $\operatorname{Cot}\alpha = \frac{\operatorname{sec} 2\alpha + 1}{\operatorname{tang} 2\alpha} = \frac{\operatorname{tang} 2\alpha}{\operatorname{sec} 2\alpha - 1}$

$$= \frac{1 + \text{Cof } 2\alpha}{\text{fin } 2\alpha}$$

$$= \frac{\text{fin } 2\alpha}{1 - \text{Cof } 2\alpha}$$

$$= \frac{\text{fin } 2\alpha}{1 - \text{Cof } 2\alpha}$$

* * *

17) $\text{fin } (\alpha + \beta) + \text{fin } (\alpha - \beta) = 2 \text{ fin } \alpha \text{ Cof } \beta$
18) $\text{fin } (\alpha + \beta) - \text{fin } (\alpha - \beta) = 2 \text{ Cof } \alpha \text{ fin } \beta$
19) $\text{Cof } (\alpha + \beta) + \text{Cof } (\alpha - \beta) = 2 \text{ Cof } \alpha \text{ Cof } \beta$
20) $\text{Cof } (\alpha + \beta) - \text{Cof } (\alpha - \beta) = 2 \text{ fin } \alpha \text{ fin } \beta$

Anmerkung.

Die Formeln 9 ... 12 dienen auch aus des halben Bogens Sinus ꝛc. des ganzen Bogens Sinus ꝛc. zu finden; und umgekehrt, sind die Formeln 13 ... 16 brauchbar. (8. Z.)

Aus den bisherigen trigonometrischen Formeln, lassen sich leicht noch eine große Menge andere, zwar nicht in gleichem Grade brauchbare, herleiten; von denen aber doch welche, so wie die bisherigen insgesammt, von häufiger Anwendung sind.

Mehrere dergleichen Formeln und ihre Beweise finden sich in unsers Herrn Autors astronomischen Abhandlungen 1. Samml. 1. Abh.; Herrn Prof. Klügels analytischen Trigonometrie (Braunschw. 1770), u. a.

20. Satz. 3.

Weil ein Winkel des Dreyecks mit seinen beyden andern 180° macht (S. 13. S.); also

$$C = 180° - (A + B);$$

so ist

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin [180° - (A + B)] \\ &= \sin (A + B) \text{ [1. Erkl. 2. Z.]} \\ &= \text{ꝛc. (wie im Buche.)} \end{aligned}$$

20. Satz. 4.

Weil nämlich (2)

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a},$$

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

so erhält man, wenn man dieß in die Gleichung in (3) für sin C, sin B, sezt,

$$\frac{c \sin A}{a} = \sin A \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \frac{b \sin A}{a}$$

oder

$$\frac{c}{a} \sin A = \sin A \left(\operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \cdot \frac{b}{a}\right);$$

Folglich auf beyden Seiten mit sin A dividirt,

$$\frac{c}{a} = \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \cdot \frac{a}{b}$$

Multiplicirt man nun auf beyden Seiten, oder macht

$$\frac{c}{a} \cdot a = a \operatorname{Cos} B + \operatorname{Cos} A \cdot \frac{b}{a} \cdot a$$

so bekommt man

$$c = a \operatorname{Cof} B + \operatorname{Cof} A \times b$$
$$= a \operatorname{Cof} B + b \operatorname{Cof} A, \text{ (wie im B.)}$$

20. Satz. 6, 7, 8, 9.

I) $(c - b \operatorname{Cof} A)^2$, $[= c^2 - 2bc \operatorname{Cof} A + b^2 \operatorname{Cof} A^2$ (Ar. IV, 1)]

ist

$$= (a \,.\, \operatorname{Cof} B)^2$$
$$= a^2 \operatorname{Cof} B^2$$

II) Aber

$$\operatorname{Cof} B^2 = 1 - \operatorname{fin} B^2$$

und nach (2)

$$\operatorname{fin} B = \frac{b \operatorname{fin} A}{a}$$

Also

$$\operatorname{fin} B^2 = \left(\frac{b \operatorname{fin} A}{a}\right)^2$$
$$= \frac{b^2 \operatorname{fin} A^2}{a^2} \text{ (Ar. II, 14, 16)}$$

Folglich

$$\operatorname{Cof} B^2 = 1 - \frac{b^2 \operatorname{fin} A^2}{a^2}$$

III) Mithin

$$a^2 \operatorname{Cof} B^2 = a^2 \left(1 - \frac{b^2 \operatorname{fin} A^2}{a^2}\right)$$
$$= a^2 \left(\frac{a^2 - b^2 \operatorname{fin} A^2}{a^2}\right)$$

=

$$= \frac{a^2 (a^2 - b^2 \sin A^2)}{a^2}$$

$$= a^2 - b^2 \sin A^2$$

IV) Also

$$c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + b^2 \operatorname{Cos} A^2 = a^2 - b^2 \sin A^2 \text{ (I, III)}$$

V) In dieser Gleichung nun ist linker Hand des Gleichheitszeichen, der lezte Theil, oder

$$b^2 \operatorname{Cos} A^2 = b^2 (1 - \sin A^2) \text{ [3. Erkl. 13.]}$$
$$= b^2 - b^2 \sin A^2$$

VI) Folglich, wird aus der Gleichung in (IV), (wenn man daselbst für $b^2 \operatorname{Cos} A^2$ den in (V) gefundenen Werth, sezt,)

$$c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + b^2 - b^2 \sin A^2 = a^2 - b^2 \sin A^2$$

Nun:

$$+ b^2 \sin A^2 = + b^2 \sin A^2, \text{ add.}$$

giebt

$$c^2 - 2bc . \operatorname{Cos} A + b^2 = a^2$$

wie im (9) im Buche.

20. Satz. 10.

$$c^2 - 2bc \operatorname{Cos} A + b^2 = a^2 \text{ (9)}$$
$$+ 2bc \operatorname{Cos} A = + 2bc \operatorname{Cos} A, \text{ ad.}$$

Giebt:

$$c^2 + b^2 = a^2 + 2bc \operatorname{Cos} A \text{ (Ar. I, 88)}$$

und

$$a^2 = a^2 \quad \text{abgez.}$$

$$c^2 + b^2 - a^2 = 2bc \operatorname{Cos} A$$

Nun dividire man auf beyden Seiten mit 2 bc, so erhält man (verm. Ar. I. 88) Col A, wie im Buche angegeben.

20. Satz. 12.

$$\text{Col } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \quad (10)$$

Also

$$1 + \text{Col } A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc} \text{ (Ar. I. 88)}$$

Bringt man nach Ar. I. 72, das was rechter Hand das Gleichheitszeichen steht, auf einerley Benennung; so hat man

$$1 + \text{Col } A = \frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

Von dieses Bruchs Zähler ist

$$2\,bc + b^2 + c^2 = (b + c)^2 \text{ [Ar. IV. 1.]}$$

Also der Zähler selbst

$$= (b + c)^2 - a^2.$$

Man setze

$$b + c = x;$$

so hat man

$$(b + c)^2 - a^2 = x^2 - a^2$$
$$= (x + a)(x - a)$$

(wie aus Ar. II. 5; III. Ex. erhellet)

Sezt man nun in dieses Product wieder b + c für x; so ergiebt sich

$$(b + c + a)(b + c - a)$$

gleich

gleich dem Zähler des 1 + Cosin A gleichen Bruche.

20. Satz. 13, 14.

Aus (10) ist

$$\text{Cos}\, A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$$

Also

$$1 - \text{Cos}\, A = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}\right)$$

(Ar. I. 88.)

$$= \frac{2\,bc - (b^2 + c^2 - a^2)}{2\,bc}$$

(Ar. I, 72)

$$= \frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{2\,bc}$$

(Ar. II, 3.)

$$2\,bc - b^2 - c^2 = -(-2\,bc + b^2 + c^2)$$

[Ar. I, 98.]

Aber, (nach Ar. II, 5, II. Ex.) ist

$$-2\,bc + b^2 + c^2 = (b - c)^2$$

sowohl, als auch

$$= (c - b)^2,$$

weil beyde entgegengesezte, sonst gleiche Größen einerley Quadrat geben; daher ist es gleichgültig, ob man $-2\,bc + b^2 + c^2$ für das Quadrat von $b - c$ oder von $c - b$ ansehen will. Hier wird $-2\,bc + b^2 + c^2$ für das erstere genommen.

Also

Also hat man

$$-(-2bc+b^2+c^2) \text{ oder } 2bc-b^2-c^2$$
$$= -(b-c)^2$$

Folglich der Zähler

$$2bc-b^2-c^2+a^2 = -(b-c)^2+a^2$$
$$= a^2-(b-c)^2$$

Man setze

$$b-c = y;$$

so hat man

$$a^2-(b-c)^2 = a^2-y^2$$

Folglich

$$=(a+y)(a-y) \text{ [Ar. II, 5]}$$

Nun setze man für y, wieder b — c so erhält man

$$a^2-(b-c)^2 = (a+b-c)[a-(b-c)]$$
$$= (a+b-c)(a-b+c)$$

(Ar. 1, 98)

gleich dem Zähler das 1 — Cos A gleichem Bruche.

Also ist

$$1+\text{Cos } A = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$1-\text{Cos } A = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

Folglich

$$(1+\text{Cos } A)(1-\text{Cos } A) =$$
$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} \times$$
$$\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

=

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4\,b^2\,c^2}$$

Aber

$$(1 + \mathrm{Cof}\,A)(1 - \mathrm{Cof}\,A) \text{ vor} = 1 - \mathrm{Cof}\,A^2$$

und

$$1 - \mathrm{Cof}\,A^2 = \mathrm{fin}\,A^2;$$

Folglich

$$\mathrm{fin}\,A^2 = \text{ꝛc. (S. 14 im Buche)}$$

20. Satz. 23.

Da sehe ꝛc.]

Dieses mit einem Beyspiele zu erläutern, dient folgendes:

Im Exempel im (24) (auf der a. Seite) wird

$$\log u = 3,4385635$$

gefunden;

Von diesem soll man den Logarithmen von 2 bc, $= 3,5563025$ abziehen;

Dieß kann man, wenn man (um einen positiven Rest zu erhalten,) zu jenen 1 addirt, und alsdann die Subtraction verrichtet.

Man erhält aber so einen bejahten Rest, 0,8822610 der hier um 1 größer als das, was man eigentlich sucht, ist

Man muß daher hinter ihm, — 1 setzen. (Ar. VI, 33. Ex.)

20. Satz. 30.

In 17. Satzes Erl. IX. ist so die Formel in (10) gefunden worden, aus welcher man, folglich auch die in (15) findet. (13, 14.)

20. Satz. 33.

Um den Winkel A, an der Spitze eines gleichschenklichten Dreyecks zu finden, darf man nur die Seiten, die ihn einschliessen einander gleich, also im (15) oder (10) $b = c$, setzen. (G. 2. S. 3. Z.)

Hierdurch erhält (in 15)

$$\sin A = \frac{\sqrt{(a+b+b)(b+b-a)(a+b-b)(a+b-b)}}{2b \cdot b}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+2b)(2b-a)a^2}}{2b^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+2b)(ab-a)\sqrt{a^2}}}{2b^2} \text{ (Ar. II. 15.)}$$

$$= \frac{a\sqrt{(a+2b)(2b-a)}}{2b^2}$$

wo $a\sqrt{(a+2b)(2b-a)}$ das u in (16) worden ist.

Wollte man diese Formel in Worten ausdrücken; so hiesse sie:

Man nehme einen von den gleichen Schenkeln doppelt;

Ferner mache man die Summe und die Differenz dieses doppelten und der Grundlinie (a);

Hierauf

Hierauf ein Product dessen Factoren diese Summe und Differenz sind;

Aus diesem Producte ziehe man die Quadratwurzel, und multiplicire sie mit der Grundlinie, a.

Was man so erhält dividire man durch das doppelte Quadrat, des genommenen Schenkels.

Der Quotient ist des gesuchten Winkels Sinus für dem Halbmesser 1.

Uebrigens s. m. 20 ꝛc.

20. Satz. 1. Zusatz.

Hier sind gegeben:

Eines Dreyecks zwo Seiten b, c, nebst dem Winkel A den sie einschliessen.

Man sucht:

Die dritte Seite, a.

Diese findet sich nach des vor. 20. S. 9, wo

$$a^2 = c^2 - 2\,bc\,\mathrm{Cos}\,A + b^2$$
$$= c^2 + b^2 - 2\,bc\,\mathrm{Cos}\,A$$

Folglich

$$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2\,bc\,\mathrm{Cos}\,A)}$$

Wenn der Winkel A stumpf ist, wird Cos A verneinend; folglich das Product — 2 bc Cos A positiv also = 2 bc Cos A (Ar. I. 108) dahingegen, für einen spitzigen Winkel A, dieses Product negativ bleibt.

Also ist

I) für $A > 90°$

$a^2 =$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,bc\,\mathrm{Cos}\,A$$

folglich

$$a^2 > b^2 + c^2$$

oder in einem stumpfen Dreyeck ist die Seite die dem stumpfen Winkel gegenübersteht, größer als die Summe der Quadrate der Seiten, die ihn einschliessen.

II) für $A < 90^\circ$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,\mathrm{Cos}\,A$$

also

$$a^2 < b^2 + c^2$$

Oder: das Quadrat der Seite, die in einem Dreyecke einem spitzigen Winkel gegenübersteht, ist kleiner als die Summe der Quadrate der Seiten, die ihm einschliessen.

20. Satz. 1. Zusatz. Exempel.

Im Producte $-\,2\,bc\,\mathrm{Cos}\,A = +\,1079,81399$, folgen eigentlich nach der 9 noch die zwo Ziffern 26; da aber diese lezten Ziffern, (wie aus der Decimalrechnung bekannt) unrichtig werden, und man auch die Seite bis auf 4 und 5 Decimalstellen, schon sehr genau findet; so sind sie im Buche gleich weggelassen worden.

Ferner: Würde man $a^2 = 3649,81399$ gefunden haben; da aber 0,00009 wenig von 0,0001 unterschieden ist; so kann man ohne merklichen Irrthum, $0,00009 = 0,0001$ setzen; wodurch denn $a^2 = 3649,8140$ wie im Buche, erhalten wird.

Derglei-

Dergleichen Verfahren kann man in ähnlichen Fällen beobachten.

Beym 20. Satze selbst ꝛc.]

Man findet hier aus den Seiten 19 und 47 und dem Winkel 127° 12′ den sie einschließen, die ihm gegenüberstehende Seite = 60, 41, in eben dem Maaße in dem 19, und 47 gegeben sind.

Wäre ausser den Seiten 19, 47, noch die Seite 60; 41 gegeben; so würde man der lezteren gegegenüberstehenden Winkel, = 127° 12′ finden.

Im Exempel beym 20. Satze (29) fande man aus den Seiten 19; 47; 60, den der Seite 60 gegenüberliegenden Winkel = 125° 14′.

Für die Seite 60, 41 findet man also einen Winkel, der um 127° 12′ — 125° 14′ = 1° 58′ größer ist, als der, den man für die Seite 60 fand, wenn beyde von gleichen Seiten 19; 47, eingeschlossen sind.

So zeigt sich wie Aenderungen der Seiten mit Aenderungen der Winkel zusammen hängen.

Wäre daher auf dem Felde eines Dreyecks beyde Seiten 19; 47, richtig gemessen worden, aber die dritte Seite 60, um 0, 41 zu groß; so würde man folglich daraus den ihr entgegenstehenden Winkel, um 1° 58′ zu groß finden.

Umgekehrt: hätte man die Seiten 19; 47 richtig gemessen, aber den Winkel den sie einschliessen, um 1° 58′ zu groß, so würde man daraus die ihm

entgegenstehende Seite um 0, 41 zu groß erhalten haben.

Man sieht aus diesen Beyspielen schon welchen Einfluß die Fehler der Seiten in die Winkel, und umgekehrt: die Fehler der Winkel in die Seiten, haben; auch wie nothwendig es ist, daß man sie in Anschlag zu bringen weiß.

Dieß alles aber läßt sich durch die Analysis weit vollkommener bewerkstelligen, wie es auch in den im 36. S. 3. Anm. und dessen Erl. angeführten Büchern geschehen ist.

20. Satz. 2. Zusatz.

So ist Cof BAC ꝛc.]

Es ist

$$CAB + DBA \text{ oder } CAB + \Phi = 180°$$

(S. 12. S. 6. Z.) Also

$$CAB = 180° - \Phi$$

Folglich

$$\text{Cof } CAB = \text{Cof } (180° - \Phi)$$

$$= - \text{Cof } \Phi \text{ (3. Erkl. 2. Z.)}$$

Nun ist die Diagonale AD, die Seite des Dreyecks ABD die den Winkel Φ gegenüber steht. Will man daher das Quadrat von AD durch AB, BD und Φ oder welches eben das, durch f, g, und Φ ausdrücken; so hat man den Fall des vorigen Zusatzes. Folglich

$$AD^2 = f^2 + g^2 - 2\,fg\,\text{Cof}\,\Phi;$$

Eben so hat man das Quadrat von der Diagonale BC, (welche man sich in a. 48. Fig. Tab. III. gezogen, denken muß)

$= f^2$

$$= f^2 + g^2 - 2\,fg\,\mathrm{Cof\,BAC};$$

Aber

$$\mathrm{Cof\,BAC} = -\mathrm{Cof}\,\Phi$$

folglich

$$BC^2 = f^2 + g^2 - 2\,fg \times -\mathrm{Cof}\,\Phi$$
$$= f^2 + g^2 + 2\,fg\,\mathrm{Cof}\,\Phi;$$

Nun

$$AD^2 = f^2 + g^2 - 2\,fg\,\mathrm{Cof}\,\Phi \text{ add.},$$

giebt

$$AD^2 + BC^2 = 2\,f^2 + 2\,g^2$$
$$= 2\,(f^2 + g^2);$$

Aber abgezogen

$$BC^2 - AD^2 = 2\,fg\,\mathrm{Cof}\,\Phi + 2\,fg\,\mathrm{Cof}\,\Phi$$
$$= 4\,fg\,\mathrm{Cof}\,\Phi.$$

21. Satz. 2.

Nach Vorer. 9. ist das Perpendikel von B auf AC, oder

$$h = AB \sin A;$$

Weil aber AB *) dem Winkel C entgegensteht, so ist nach 20. S. 1,

$$AB = c;$$

Folglich

$$h = c \cdot \sin A;$$

Nun ist nach (1)

$$T = \frac{h \cdot b}{2},$$
$$= \tfrac{1}{2}\,b \cdot h$$

*) Fig. 5. Tab. VIII.

Also

$$T = \tfrac{1}{2} b \,.\, c \,.\, \sin A$$

und weil

$$\sin A = \frac{u}{2\,bc} \text{ (20. S. 15, 17);}$$

so hat man

$$T = \tfrac{1}{2} bc \frac{u}{2\,bc}$$

$$= \frac{bc \,.\, u}{4 \,.\, bc}$$

$$= \tfrac{1}{4} u$$

oder

$$T = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)};$$ [20. S. 17]

21. Satz. 6.

Nach (2) findet man die Höhe des Dreyecks

oder

$$h = c \sin A$$

also

$$\log h = \log c + \log \sin A;$$

Weiß man h; so hat man

$$T = \tfrac{1}{2} b \,.\, h; \text{ (1)}$$

oder

$$\log T = \log \tfrac{1}{2} b + \log h$$

Die Data des Exempels hier, sind aus dem Beyspiele im 20. S. 24.

Der Logarithme giebt ꝛc.]

Nämlich

log h

$$\log h = 1,5354735$$

giebt h, wie im Buche steht.

21. Satz. 7.

Sind die Seiten b und c gegeben nebst dem Winkel A, so findet man daraus unmittelbar nach (2)

$$T = \tfrac{1}{2} b \,.\, c \,.\, \sin A$$

oder

$$\log T = \log \sin A + \log c + \log \tfrac{1}{2} b.$$

21. Satz. 8.

Man kann sich dieses bey ꝛc.]

Wenn (Fig. 42, Tab. II.),

$$AD = AB$$

gesezt wird; so haben die Dreyecke DCA, ACB, gleiche Grundlinien, überdieß ihre Spitzen beysammen in einem Puncte C; also haben sie auch gleiche Höhen: Folglich sind sie gleichen Inhalts (G. 14. S. 2. B.)

21. Satz. 10.

Hier ist also gegeben

Der Inhalt T
die beyden Seiten b, c,

und wird gesucht

der Winkel A, den b und c einschliessen.

In (2) war

$$T = \frac{bc}{2} \sin A$$

Multiplicirt man nun auf beyden Seiten mit 2, so erhält man

$$2\,T = 2 \cdot \frac{bc}{2} \sin A$$

$$= bc \sin A$$

dividirt man aber mit bc, so komms

$$\frac{2\,T}{bc} = \frac{bc \sin A}{bc}$$

$$= \sin A$$

21. Satz. 11.

.... sonst kömmt der ꝛc.]

Er darf aber vermöge 2. Erkl. 6. Z. nicht grösser als der Halbmesser 1 seyn.

Nur in dem ..... Producte gleich]

Denn in diesem Falle wird

$$\sin A = \sin 90^\circ = 1$$

Folglich auch

$$\frac{2\,T}{bc} = 1$$

$$\frac{2\,T}{bc} \cdot bc = 1 \cdot bc \text{ (Ar. I. 88.)}$$

oder

$$2\,T = b \cdot c$$

gleich dem Inhalte eines Rechtecks unter den Seiten b, c;

Also

Also

$$T = \frac{bc}{2}$$

wie gehörig.

21. Satz. 13.

Hier sey gegeben

der eine Schenkel b,
der Winkel A, welchen der gegebene und zu suchende Schenkel, einschlieſſen; und
des Dreyecks Inhalt T,

werde aber gesucht:

der andere Schenkel c.

Nach (2) ist

$$T = \frac{bc \sin A}{2}$$

Also

$$2 \cdot T = \frac{cb \sin A}{2} \cdot 2$$

$$= cb \cdot \sin A$$

Folglich

$$\frac{2T}{b \sin A} = \frac{c \cdot b \sin A}{b \sin A}$$

$$= c.$$

21. Satz. 16.

$c = \frac{2T}{b \sin A}$, ist auch

$$= \frac{2\,T \,.\, 1}{b \,.\, \sin A}$$

$$= \frac{2\,T}{b} \,.\, \frac{1}{\sin A}$$

Aber, verm. 5. Erkl. 1. Z. und Vor. 1. ist

$$\frac{1}{\sin A} = \text{Cosec } A$$

Folglich

$$c, = \frac{2\,T}{b} \text{ Cosec } A$$

wie im Buche.

Für die Rechnung mit Logarithmen wäre hier

$$\log c = \log 2\,T + \log \text{Cosec } A - \log b.$$

Die sphärische Trigonometrie.

1. Erklärung.

Auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct K, (Fig. 1, Tab. X.) seyen P, B, A drey Puncte, die aber nicht in einem und derselben größten Kreise liegen.

Durch jedes Paar (P, B; P, A; A, B) dieser Puncte denke man sich eines größten Kreises Bogen (PB, PA, AB,) gelegt.

So heißt das Dreyeck PBA das diese drey Bogen PB, PA, AB, größter Kreise auf der Kugel-Oberfläche machen ein sphärisches oder Kugel Dreyeck. Die Bogen PB, PA, AB, heißen seine Seiten, und die sphärischen Winkel an P, B, A, (G. 52. S. 4. Z.) seine Winkel.

Die Seiten sowohl als die Winkel eines solchen Dreyecks werden in Graden ausgedruckt.

1. Erklärung. 1. Zusatz.

Man ziehe von den Durchschnittspuncten, P, A, B, (4. Fig. X. Tab.) der Bogen, PA, AB. BP gerade Linien PK, AK, BK, nach der Kugel Mittelpuncte K;

So sind, (vermöge Geom. 22. S. 6, 7. Z.) die Seiten, PA, AB, BP, des sphärischen Dreyecks BAP, die Maaße der Winkel PKA, AKB, PKB, welche die Linien PK, AK, BK, so Halbmesser der Kugel sind, in K, der Kugelmittelpuncte, machen.

Von des sphärischen Dreyecks, PBA einer Seite, PB, einem Endpuncte, P, fälle man auf die Ebne AKB, der andern Seite, AB, das Loth, PM, und auf beyden Seiten, PB, AB, Ebnen, PKB, AKB, Durchschnitt BK, das Perpendikel, PN, ziehe überdieß durch N, M, die Puncte wo beyde Perpendikel eintreffen, die Linie NM, welche auf BK senkrecht seyn wird (G. 46. S. 6. Z.);

So ist der Winkel PNM, beyder Ebnen PKB, AKB, Neigung (G. II. Th. 2. Erkl.) und folglich = B, dem sphärischen Winkel der Seiten BP, BA, deren Ebnen, BKP, AKB, sind (Geom. 52. 4. Z.)

Eben so erhellet, daß der Neigungswinkel, PQN, der Ebnen, PKA, BKA, der Seiten PA, BA, gleich der leztern ihren sphärischen Winkel A, ist, so wie der sphärische Winkel P gleich der Neigung der Ebnen, PKB, PKA, der Seiten PB, PA.

1. Erklärung. 1. Zusatz. Anmerkung.

Eben so bedeutet: **Bogen** PA, PB, ꝛc. die Größe dieser Bögen, in Graden; und: **Ebne** PA, PB ꝛc. die Ebnen der ganzen größten Kreise, wovon des sphärischen Dreyecks Seiten PA, PB ꝛc. Bögen, und PKA, PKB, Ausschnitte sind. Ueberdieß:

dieß: Kreis BA, PA, PB ꝛc. die größten Kreise der Bögen BA, PA, PB ꝛc.

1. Erklärung. 2. Zusatz.

die . . . . . Winkel ein]

Die drey Ebnen, BP, PA, BA, der größten Kreise, von den des sphärischen Dreyecks PAB, Seiten, PB, AP, AB, Bögen sind, schliessen an der Kugelmittelpuncte, K, einen dreyseitigen körperlichen Winkel (G. II. Th. 3. Erkl.) ein.

Eine dreyseitige Ecke aber nennt man auch ein körperliches oder solides Dreyeck, dessen Winkel die Neigung der Seitenflächen, oder der durch die ebnen Winkel, die die Ecke einschliessen, gelegten Ebnen.

Also sind die Winkel des sphärischeu Dreyecks PBA einerley mit den Winkeln des soliden Dreyecks an K, und dieses sphärischen Dreyecks Seiten PB, PA, AB die Maasse der ebenen Winkel, PKB, PKA, AKB, die die dreyseitige Ecke an K begränzen (1. Z.).

In so ferne es folglich bey einem sphärische Dreyecke auf die Verhältniß der Seiten zum Umkreise ankommt; so ist es einerley ob man dasselbe, oder statt dessen das ihm zugehörige körperliche Dreyeck untersucht, so verschieden auch beyde sind.

In dieser Absicht kann man das körperliche Dreyeck als ein sphärisches, und umgekehrt, an-

sehen;

sehen; welches viel zur deutlichen Einsicht der sphärischen Dreyecks Lehren beyträgt.

Allemal aber ist das solide Dreyeck die Spitze einer Art von Pyramiden, deren ꝛc. (S. Buch).

1. Erklärung. 2. Zusatz. Anmerkung.

Euklid beweißt in seines XI. Buchs 20. Satze, daß die Summe jeder zween ebenen Winkel von den dreyen woraus ein körperliches Dreyeck besteht, größer ist, als der dritte.

Nun sind die Maasse dieser Winkel, Seiten eines sphärischen Dreyecks (1, 2. Zus.): Also sind in jedem Kugeldreyecke die Summe zwoer Seiten größer als die dritte.

Ferner zeigt Euklid im 21. Satze dieses Buches, was schon Geometr. II. Th. 3. Erklär. Anmerkung ist erinnert worden, daß nämlich die Summe aller ebnen Winkel, die eine Ecke ausmachen weniger als 4 R oder 360° beträgt.

Also findet dieß auch bey einem körperlichen Dreyecke statt.

Folglich muß (vermöge 1, 2. Zus.) die Summe aller drey Seiten eines sphärischen Dreyecks kleiner als der ganze Kreis oder 360° seyn.

So ist in dem Kugeldreyecke APB der 4. Figur, $(PA + AB + PB) < 360°$.

1. Erklärung. 2. Zusatz.

Von des sphärischen Dreyecks (Fig. 1.) einer Seite PA Endpunct P, ist auf den Durchschnitt AK die Ebnen PKA dieser Seite mit der Ebnen AKB der andern Seite AB dieses Dreyecks, ein Loth PM gefällt.

Nun denke man sich durch P, M, K eine Ebne; So steht diese auf der Ebne AKB senkrecht (G. 47. S.):

Wenn daher die Seite PA in dieser Ebne liegt, daß also die Ebne PA (1. Zus. Anm.) mit der durch K, M, P gelegten einerley ist; so steht die Seite PA auf der Ebne AKB senkrecht, oder die größten Kreises Ebnen PA, AB sind auf einander senkrecht, also auch ihre Bogen oder die Seiten PA, AB.

Ein solches sphärisches Dreyeck, PAB, aber in dem zwo Seiten senkrecht auf einander stehen, heißt **rechtwinklicht**. Eine von diesen beyden Seiten, PA, heißt sein **Perpendikel**, die andere, BA. hingegen, die **Grundlinie** oder das **andere Perpendikel**; beyde führen den gemeinschaftlichen Namen, **Cathéti**, oder **Perpendikulärseiten**; die Seite PB endlich, die dem rechten Winkel gegenüber steht, heißt die **Hypothenuse**. Benennungen, die auch wie bekannt, beym geradlinicht rechtwinklichten Dreyecke statt finden, aber desfalls zu keinen Irrungen Anlaß geben, weil man gleich sieht von was die Rede ist.

1. Erklärung. 4. Zusatz.

Wenn PK in K auf die Ebne BA senkrecht steht; so müssen (Fig. 1.) N, M in K und die Lothe PM, PN; mit PK (Fig. I.) zusammen fallen (Geom. 47. S. 2. Zus.); und weil die Ebnen PB, PA, (1. Zus. Anm.) durch das Loth PK gehen; so stehen sie vermöge Geom. 47. Satzes auf den Ebnen BA, senkrecht.

In diesem Falle also stehen die zwo Seiten PB, PA des sphärischen Dreyecks ABP auf der dritten AB senkrecht; folglich ist in so ferne der sphärische Winkel B sowohl, als A, ein rechter.

Da nun die Winkel PKA, PKB rechte sind; so sind die Bogen PA, PB Quadranten (Geom. 22. S. 4. Z.) und folglich ist P, der Punct wo sich die beyden senkrechten Seiten PB, PA schneiden, der Pol des größten Kreises, von dem die dritte Seite BA ein Bogen ist (Geom. 52. S. 2. Z.).

1. Erklärung. 5. Zusatz.

Es erhellet, daß die Ebne PB die Ebne PA, so schneiden kann, daß beyder Ebnen Neigungswinkel BKA (Fig. I, II.) entweder ein spitziger, oder ein rechter, oder stumpfer, ist.

Dieser Winkel aber ist gleich dem sphärischen, den die größten Kreises Bögen PB, PA am Pole P machen (G. 52. S. 4. Z.). Folglich kann dieser sphärische Winkel, spitzig, ein rechter, oder stumpf seyn.

Daher

Daher kann ein rechtwinklichtes Kugeldreyeck PBA, nach Verschiedenheit des Winkels P am Pole des größten Kreises auf dem die zwo Seiten PA, PB senkrecht stehen, ausser zween rechten und einem spitzigen, auch drey rechte, oder zween rechte und einem stumpfen Winkel, haben.

Wenn die Ebnen PB, PA (Fig. III.) auf der Ebne BA schief stehen; so machen die Bogen PB, PA mit dem Bogen BA schiefe sphärische Winkel B, A (G. 52. S. 4. Z.) und das Kugeldreyeck PBA heißt schiefwinklicht.

Man sieht daß ein solches Dreyeck, entweder lauter spitzige, oder lauter stumpfe, oder stumpfe und spitzige Winkel zugleich, haben kann.

Also gilt bey den Kugeldreyecken nicht das, was der 13. Satz in der Geometrie von ebnen Dreyecken lehret.

Man kann hier blos sagen, daß die Summe der drey Winkel eines Kugeldreyecks größer als 2 R oder 180° und kleiner als 6 R oder 540° sey.

Den Beweis hiervon lese man in Herrn Hofr. Karstens Lehrbegrif im 519. §. der Geometrie.

Indessen lassen sich eine Menge Sätze, die von geradlinichten Dreyecken bewiesen worden sind, auch hier anwenden, und fast auf gleiche Art beweisen, der Kürze wegen will ich nur einige ohne Beweis anführen. Man findet sie im vorhin angeführten Buche im XXIII. Absch. der Geometrie bewiesen.

Diese

Diese Sätze aber, sind folgende.

1) Wenn zwo Seiten gleich sind, oder das Kugeldreyeck gleichschenklicht ist, so sind die ihnen entgegenstehende Winkel gleich, und umgekehrt.

2) Wenn eines sphärischen Dreyecks Seiten gleich, oder das Dreyeck gleichseitig ist; so sind auch die Winkel gleich, und umgekehrt.

Die Winkel können sowohl im gleichschenklichten als gleichseitigen Kugeldreyecke stumpf, rechte oder spitzige seyn.

3) Wenn die Halbmesser der Kugeln gleich seyn, so hat man für die Gleichheit der sphärischen Dreyecke eben die Sätze wie für die ebenen im 2, 3, 4. Satze der Geometrie.

Nämlich: Wenn in zwey Kugeldreyecke

a) zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel

b) eine Seite mit den beyden an ihr liegenden Winkeln,

c) alle drey Seiten

gleich sind; So sind die Kugeldreyecke auch gleich.

1. Erklärung. 6. Zusatz.

Wie auch zween größte Kreise einander schneiden (Geom. 49. S. 5. Z.); so kann man doch durch sie einen größten Kreis allezeit so legen, daß drey ihrer Durchschnittspuncte allemal dergestalt genommen werden können, daß jede Seite des

sphä-

sphärischen Dreyecks das sie geben, kleiner als 180° ist.

Es seyen (Fig. IV.) PBQ, PAQ, zween größte Kreise, die einander in P und Q schneiden. Nun nehme man die Bögen PA, PB, < 180°, und lege durch B, A einen größten Kreis ABR; so ist jeder der Bögen PB, BA, PA, als Seiten des Kugeldreyecks BPA, kleiner als 180°.

Denn PB, PA sind so angenommen; man darf also nur zeigen, daß BA < 180°. Dieß erhellet daraus, daß ABR und PAQR größte Kreise sind; diese aber halbiren einander in A und R (Geom. 49. S. 5. Z.): Folglich ist der Bogen ABR = 180° und mithin der Bogen BA < 180° (Vor. 8. und der. Erl.)

Der der Seite BA entgegenstehende Winkel ist auch kleiner als 180°, weil BPA + BPR = 180° (Geom. 52. S. 4. Z.). Da nun auch BA < 180°; so folgt, daß in einem Kugeldreyecke der Seite die kleinere als 180°, ein Winkel entgegensteht, der ebenfalls < 180°, und umgekehrt.

Auf ähnliche Art erhellet, daß der Seite, die > 180°, ihr gegenüberstehender Winkel auch > 180° ist, und umgekehrt.

In der Folge ist nur von solchen Kugeldreyecken die Rede, deren jede Seite < 180°.

Man hat auch nicht nöthig andere Kugeldreyecke zu berechnen.

Denn es sey der Bogen PROA > 180°, dergestalt, daß der Bogen BA dessen Ergänzung zu 360°; so hat das Kugeldreyeck BROAPB mit dem sphärischen Dreyecke BPA, die Seiten PB, PA gemein, und der Winkel, welcher der in diesem der Seite BA entgegen steht, ergänzt auch den Winkel, so der Seite BROA in jenem Dreyecke gegenübersteht, zu 360°, so wie die an den gemeinschaftlichen Seiten anliegenden Winkeln einander zu 180°.

Man darf also nur das Dreyeck APB, als das worinne jede Seite < 180°, berechnen, so findet man daraus so gleich die in dem Dreyecke BROAPB liegende Stücke.

2. Erklärung.

Einige, wie Herr Hofr. Karsten, nennen diese Trigonometrie auch die körperliche, weil Seiten und Winkel körperlicher Dreyecke nach eben den Regeln berechnet werden.

Von rechtwinklichten Dreyecken.

1. Satz.

In einem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke verhält sich

I) Der Sinus totus zum Sinus der Hypothenuse, wie der Sinus des dem einen Perpendikel entgegen stehenden Winkels zum Sinus dieses Perpendikels,

II) der

II) der Sinus totus zum Sinus des einen Catheten, wie die Tangente des dem andern Catheten gegenüber liegenden Winkels zur Tangente eben dieses Catheten.

Bedingung:

r sey = dem Sinus totus, und (wie 1. Erkl. 3. Zus.) im rechtwinklichten Kugeldreyeck APB (1. Fig.), PB die Hypothenuse, PA der eine Cathete, und BA der andere; überdieß B der PA und P der BA entgegenstehende Winkel;

Behauptung:

I) r : sin BP = sin B : sin PA
r : sin BP = sin P : sin BA
II) r : sin BA = tang B : tang PA.
r : sin PA = tang P : tang BA.

Beweis.

Für I)

1) Wie in der 1. Erklärung 1. Zusatze und dessen Erläuterung sey PM ein Loth von P auf die Ebne AKB der Seite BA;

Ferner PN eines auf der Seiten PB, BA Ebnen PKB, AKB Durchschnitte BK,

Und NM die durch N, M, die Puncte wo die Lothe eintreffen, gezogene gerade Linie:

2) So fällt hier, (da die Ebne PKA auf der Ebne AKB senkrecht steht (1. Erkl. 3. Z.]) das Loth PM in die Ebne PKA (Geom. 47. S. 2. Z.)

3) Nun sind PK, AK, Halbmesser der Kugel auf dessen Oberfläche das rechtwinklichte sphärische Dreyeck verzeichnet ist. Diese begränzen den Bogen PA, (des Dreyecks BPA einen Perpendikel); und PM ist also ein Loth von des einen Endpuncte auf den andern: Folglich, für gedachten Halbmesser

PM = sin PA, (eb. Tr. 2. Erkl.);

4) Da PN in der Ebne PKB liegt; (Geom. 47. S. 2. Z.); so erhellet auf gleiche Art, daß für der Kugel Halbmesser

PN = sin PB

ist.

5) Das ebne Dreyeck PMN ist rechtwinklicht, (Geom. 46. 6. Z.) und

der Winkel PNM = B (1. Erkl. 1. Z.);

Folglich

PN : PM = r : sin B (eb. Tr. 3. S.);

Also

sin BP : sin PA = r : sin B (3, 4,)

oder

sin BP : r = sin PA : sin B (Ar. V. 34.)

d. i.

r : sin BP = sin B : sin PA. (Ar. V. 19)

Eben so erhellet, daß

r : sin BP = P : sin BA.

Folgerung.

Aus den beyden Proportionen

r : sin BP = sin B : sin PA

sin

sin P : sin BA = r : sin BP

folgt

sin P : sin BA = sin B : sin PA

und man hat daraus und aus 1) den Satz:

Im rechtwinklichten Kugeldreyeck, verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüber stehenden Winkel.

Für II)

6) Weil PM ein Loth auf KM (1); so ist das ebne Dreyeck PMK bey M rechtwinklicht, und daher

KM : MP = r : tang PA (eb. Tr. 4. S.)

Aus gleicher Ursache ist in dem rechtwinklichten Dreyeck PMN (5)

MP : NM = tang B *) : r

Folglich:

KM : NM = tang B : tang PA; (Ar. V. 51)

Und weil das ebne Dreyeck MKN bey N rechtwinklicht (S. 46. S. 6. Z. und 1,); so ist

r : sin BA **) = KM : NM (eb. Tr. 3. S.)

Folglich:

r : sin BA = tang B : tang PA (Ar. V, 51)

r : sin PA = tang P : tang BA.

1. Satz. 1. Zusatz.

Jedes Dreyeck besteht aus drey Seiten und drey Winkeln. Sind von diesen 6 Stücken drey ge-

 geben,

*) Weil nach 1. Erkl. 1. Z. der Winkel PNM = B.

**) Denn BA ist das Maas des Winkels MKN, (1. Erkl. 1. Z.) und daher sin MKN = sin BA.

geben, und eines soll gesucht werden; so kommen in der Aufgabe oder Frage vier Stücke vor: drey gegebene und das gesuchte.

Nun ist in einem rechtwinklichten Dreyecke der rechte Winkel ꝛc. (S. Buch bis: statt.)

. . . Sie können seyn ꝛc.]

Zur Erläuterung will ich die ganze Sache auf die erste Figur beziehen.

Die Glieder der Frage können also seyn

α) Alle drey Seiten PA, AB, BP;

β) Zween Winkel B, P und die Hypothenuse, PB;

γ) Zween Winkel, B, P, und ein Perpendikel, entweder PA, oder BA;

δ) Zwey Perpendikel PA, BA, und ein Winkel, entweder B oder P;

ε) Die Hypothenuse PB, ein Perpendikel, entweder PA oder BA, und der anliegende Winkel, welcher P für PA, und B für BA, ist;

ζ) Die Hypothenuse PB, ein Perpendikel, PA oder BA, und der gegenüberstehende Winkel, dieser ist B für PA, und P für BA.

1. Satz. 2. Zusatz.

Aus . . . . . aufgelöst.]

Hieraus hat man folgender zwo Aufgaben Auflösungen

I. Von

I.

Von den drey Stücken:

Hypothenuse, Perpendikel, und diesem gegenüber stehenden Winkel, sind zwey Stücke gegeben;

Man soll das dritte finden.

Also im rechtwinklichten Kugeldreyeck PBA sind (1. Fig.) vermöge 1. Zusatzes 5, diese drey Stücke:

PB, PA, B,

oder, welches eben das

PB, BA, P.

Auflösung.

1) r : sin BP = sin B : sin PA
2) r : sin BP = sin P : sin BA } (1. S. I.)

Man sieht das jegliche dieser beyden Proportionen die Glieder der Frage völlig enthalten, und jede drey Fragen beantwortet, weil jedes Glied der Frage das Gesuchte seyn kann; zu dieser Absicht braucht man nur die Proportion so zu ordnen, daß das Gesuchte zulezt kommt.

So verfahren erhält man ausser den beyden Proportionen noch folgende viere

3) sin B : sin PA = r : sin BP
4) sin P : sin BA = r : sin BP
5) sin BP : r = sin PA : sin B
6) sin BP : r = sin BA : sin P

Alle diese Proportionen thun unserer Aufgabe Gnüge, und enthalten zu 6 Fragen die Auflösung.

II.

Unter den drey Stücken:

Beyde Catheten und einen von den an der Hypothenuse liegenden Winkeln, sind zwey Stücke gegeben:

Man sucht das dritte.

Nach 1. Zus. 3 sind diese drey Stücke:

PA, BA, B

oder, welches einerley,

PA, BA, P.

Auflösung.

Da

$$\left.\begin{array}{l} r : \sin BA = \tang B : \tang PA \\ r : \sin PA = \tang P : \tang BA \end{array}\right\} (1.S.II.)$$

so findet sich allemal aus zweyen dieser Stücke, das dritte, wenn man nur die Proportion, worinne das Gesuchte vorkommt, gehörig ordnet, nämlich, daß das Gesuchte das lezte Glied wird. Auf die Art erhält man ausser den beyden Proportionen noch viere, die man leicht finden wird.

1. Satz. 3. Zusatz.

In der 2ten Figur ist BPA das rechtwinklichte sphärische Dreyeck der 1. Figur.

so sind bey M, N rechte Winkel ꝛc.]

Bey M und N sind also rechte Winkel, weil ein größter Kreis durch M, N, auf beyde Quadranten BN, BM senkrecht steht; daher durch des Kreises BA Pole D geht (Geom. 52. S. 5. B.).

Da

Da PA auf BA senkrecht steht (1. Erkl. 3. Z.) so geht der Kreis PA auch durch des Kreises BA Pole D (Geom. 50. S. 2. Z.).

Folglich schneiden die Bogen AP, MN verlängert einander in diesem Pole D, und DA, DM sind ebenfalls Quadranten. (Geom. 52. S. 2. Z.)

Daher ist DP die Ergänzung des Catheten PA zu 90°, so wie PN die Ergänzung der Hypothenuse zum Quadranten.

Weil AM das Maas des sphärischen Winkels bey D (Geom. 52. S. 4. Z.), und der Grundlinie BA Ergänzung zu 90° ist; so ist es auch D; oder D = 90° — BA; und da der Bogen NM das Maas des sphärischen Winkels B, (Geom. 52. S. 4. Z.) und der Bogen DN die Ergänzung von NM; so ist er es auch von B; oder DN = 90° — B.

Nun ist das Dreyeck PDN bey N rechtwinklicht: und darinne der sphärische Winkel DPN = BPA (Geom. 52. S. 4. Z.): Also hat man

1) r : sin DP = sin D : sin PN (1. S. I))

und

2) r : sin DP = sin P : sin DN (1. S. I))

Da aber

sin DP = Cos PA;
sin D (= sin AM,) = Cos BA;
sin PN = Cos BP
sin DN = (sin NM) = Cos B

so wird aus 1)

1′) r : Cof PA = Cof BA : Cof PB

aus 2)

2′) r : Cof PA = fin P : Cof B

und die Proportion bey 1′) giebt den Satz:

III) Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus des einen Catheten, wie der Cosinus des andern, zum Cosinus der Hypothenuse;

Die bey 2′) hingegen, den:

IV) Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus eines Catheten, wie der Sinus des anliegenden Winkels zum Cosinus des gegenüberstehenden.

Ferner hat man:

3) r : fin DN = tang D : tang PN

und

4) r : fin PN = tang P : tang DN

Da nun

fin DN = Cof B
tang D = Cot AB
tang PN = Cot PB;
fin PN = Cof PB
tang DN = Cot B;

so folgt aus 3) die Proportion:

3′) r : Cof B = Cot BA : Cot PB
4′) r : Cof PB = tang P : Cot B

Aus 3′) folgt der Satz:

V) Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus eines der beyden Winkel an der Hypothenuse,

thenuse, wie die Cotangente des anliegenden Perpendikels zur Cotangente der Hypothenuse.

Hingegen aus 4') der Satz:

VI) Der Sinus totus verhält sich zum Cosinus der Hypothenuse, wie die Tangente des einen der der Winkel an der Hypothenuse zur Cotangente des andern.

Durch diesen Sätzen kann man noch folgende Aufgaben lösen:

III. *)

Im rechtwinklichten Kugeldreyeck aus zween von den drey Seiten die dritte zu finden. (1. Z. a.)

Auflösung.

Da

$$r : \text{Cos } PA = BA : \text{Cos } PB \text{ (V)}$$

so findet sich mittelst dieser Proportion aus jeden zwo gegebenen Seiten die dritte, wenn man sie nur in jedem besondern Fall so ordnet, daß die gesuchte Seite das lezte Glied wird.

IV)

*) Diese und folgende Ziffern stimmen mit den im Buche überein. — Die dortigen Proportionen sind die Auflösungen dieser Aufgaben, die ich der Deutlichkeit wegen hier mit Worten ausdrücke, welches dort der Kürze wegen nicht so geschehen ist.

IV)

Von den zween Winkeln an der Hypothenuse und eines Catheten sind zwey Stücke gegeben:

Man soll das dritte finden.

Nach 1. Zus. γ sind diese drey Stücke:

P, B, PA,

oder,

P, B, BA;

Auflösung.

$$r : \text{Cos}\, PA = \text{sin}\, P : \text{Cos}\, B \quad (2)$$

also auch,

$$r : \text{Cos}\, BA = \text{sin}\, B : \text{Cos}\, P \quad \text{(IV. Satz)}$$

Denn hier und in ähnlichen Fällen kann man B, P verwechseln, und folglich auch diesem gemäß BA, PA; weil es gleichgültig ist, welcher von den zween Winkeln und Catheten gesucht wird.

Hier und in folgenden Fragen gilt eben das was im 2. Zusatze ist erinnert worden.

V.

Von der Hypothenuse und dem einen Catheten nebst dem eingeschlossenen Winkel sind zwey Stücke gegeben;

Man soll das dritte suchen.

Nach 1. Zus. ε) sind die drey Stücke:

PB, BA, B

oder

oder

PB, PA, P.

Auflösung.

Hiezu dienet die Proportion:

r : Cos B = Cot BA : Cot BP (3)

also auch die:

r : Cos P = Cot PA : Cos BP (V. S.)

VI.

Unter den drey Stücken:

Hypothenuse und die zween an ihr liegende Winkel, sind zwey derselben gegeben;

Man verlangt das dritte.

Nach 1. Z. β) sind sie:

PB, P, B.

Auflösung.

Die Proportion 4') oder im Buche die VI, giebt das Verlangte.

Die im 2. und 3. Zusatze und dessen Erl. erwiesenen sechs Proportionen sind also hinlänglich, allen Fragen, die für rechtwinklichte Kugeldreyecke vorkommen können, Genüge zu thun.

Man kann auch einige von ihnen aus der eb. Trig. 5. Erkl. 2. Zusatze anders ausdrücken.

Nach diesem Zusatze verhalten sich die Cotangenten zweener Winkel oder Bogen, umgekehrt wie ihre Tangenten.

Daher ist in der II. Proportion (1. S.)

tang B : PA = Cot PA : Cot B

Folglich wird aus dieser

r : sin BA = tang B : tang PA

und

r : sin BA = Cot PA : Cot B

welches die VII. im Buche ist.

Eben so entstehen daselbst aus V, VI, die VIII, IX.

1. Satz. 4. Zusatz.

Daß diese Tafel aus den VI. Proportionen (3, 2. Z.) nach der Erinnerung im 2. Zusatze verfertiget werden kann, ist kaum nöthig anzumerken.

Indessen bedarf für Anfänger die Einrichtungen beym 9, 12. und 15. Falle einige Erläuterungen.

Der 9. Fall folgt aus der VII. Proportion, nach welcher

Cot AP : Cot B = r sin BA;

Aber

$$\text{Cot AP} = \frac{r^2}{\text{tang AP}}$$ (eb. Tr. 5. Erk. 1. Z.)

Folglich:

$$\frac{r^2}{\text{tang AP}} : \text{Cot B} = r : \sin BA;$$

$$\frac{r^2}{\text{tang AP}} : r = \text{Cot B} : \sin BA \text{ (Ar. V. 34)}$$

$r^2 : r \text{ tang AP} = \text{Cot B} : \sin BA$ (Arith. V, 21)

d. i.

d. i.

$$r : \text{tang } AP = \text{Cot } B : \text{sin } BA$$

oder

$$r : \text{Cot } B \text{ tang } AP : \text{sin } BA$$

wie in der Tafel steht.

Den 12. Fall löst die VIII. Proportion. Nach ihr ist

$$\text{tang } BP : \text{tang } BA = r : \text{Cos } B$$

Aber

$$\text{tang } BP = \frac{r^2}{\text{Cot } BP} \text{ (eb. Tr. 5. Erkl. 1. Z.)}$$

Folglich

$$\frac{r^2}{\text{Cot } BP} : \text{tang } BA = r : \text{Cos } B,$$

woraus, wie vorhin, die Proportion in der Tafel folgt.

Eben so überzeugt man sich auch von der Einrichtung beym 15. Falle.

Gebrauch dieser Tafel.

Sollte man z. E. aus der Hypothenuse PB und dem Perpendikel PA, die Grundlinie BA finden; so sieht man in der Tafel nach, wo die drey Dinge so anzutreffen seyn, daß sich PB, PA in der Rubrik: **Gegeben**, und BA in der: **Gesucht**, befinden; die dabey rechter Hand stehende Proportion Cos PA : r = Cos BP : Cos BA (14. Fall) giebt das Verlangte, oder

$$\text{Cof BA} = \frac{r \cdot \text{Cof BP}}{\text{Cof PA}}, \text{ und}$$

$$\log \text{Cof BA} = \log r + \log \text{Cof BP} - \log \text{Cof PA};$$

Exempel.

Es sey

$$BP = 60°$$
$$PA = 23°$$

so ist

$$\log r = \log 10000000 = 10,0000000$$
$$\log \text{Cof BP} = \log \text{Cof } 60° = 9,6989700$$
$$19,6989700$$
$$\log \text{Cof PA} = \log \text{Cof } 23° = 9,9625076$$
$$\log \text{Cof BA} = 9,7364629$$
$$= \log \text{Cof } 56° 58' -$$

also

$$BA = 33° 2'.$$

* * *

Wenn man den

Sinus totus oder $r = 1$,

das eine Perpendikel PA das B entgegensteht $= b$,

das andere Perpendikel BA das P gegenüber liegt $= p$,

die Hypothenuse $PB = h$.

sezt;

So lassen sich die im 2, 3. Zusatze erwiesenen VIIII. Proportionen in der Ordnung wie sie dort gezählt werden auf folgende Gleichungen bringen:

I) $\sin b = \sin h \cdot \sin B$; (für ♃)

II) $\text{tang } b = \sin p \cdot \text{tang } B$; (für ♂)

III)

III) Cos h = Cos p . Cos b; (für α)
IV) Cos B = sin P . Cos b; (für γ)
V) Cot h = Cot p Cos B; (für ε)
VI) Cot B = tang P Cos h (für β)
VII) Cot B = Cot b sin p; (für δ)
VIII) tang p = Cos B . tang h; (für ε)
IX) Cot P = tang B Cos h; (für β)

Diese Gleichungen finden sich auch in unsers Hn. Autors Astronom. Abh. 1. S. 11. Abh. S. 70.

Sie erfahren die Tafel dieses 4. Zusatzes. Man darf nur (wie unser Herr Autor a. a. Orte erinnert) für jede vorkommende Frage untersuchen, zu welcher der sechs Mannichfaltigkeiten (1. Zus.) sie gehört, die ihr zukommende Gleichung unter den I. . . . IX, aufsucht, und alsdenn sehen, wie man dividiren muß, das Gesuchte zu erhalten.

Aus ihnen lassen sich also alle Fälle der Tafel, und folglich alle die bey den rechtwinklichten Kugeldreyecken vorkommen, durch Gleichungen ausdrücken, welche ich Anfängern wegen, hersetzen will, und dabey die Fälle in der Tafel blos durch arabische Ziffern anzeigen.

Es ist gegeben:

I.

Die Hypothenuse und ein Cathete;

Man sucht:

1) den diesem Catheten entgegenstehenden Winkel

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin h} \text{ (I. Gl.)}$$

$$\sin P = \frac{\sin p}{\sin h} \text{ (1. S. I)} \Big\} \text{ (13.)}$$

2) den an dem gegebenen Catheten anliegenden Winkel,

$$\text{Cof } B = \frac{\text{tang } p}{\text{tang } h} \text{ (VIII. Gl.)}$$

$$= \text{Cot } h \,.\, \text{tang } p \text{ (eb. Tr. 5. Erk. 2. 3.) (12.)}$$

$$\text{Cof } P = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } h} \Big\} \text{ 12.)}$$

$$= \text{Cot } h \text{ tang } b \Big\}$$

3) den andern Catheten.

$$\text{Cof } p = \frac{\text{Cof } h}{\text{Cof } b}$$

$$\text{Cof } b = \frac{\text{Cof } h}{\text{Cof } p} \text{ (III)} \Big\} \text{ (14)}$$

II.

Beyde Catheten;

Es wird gesucht:

1) ein Winkel.

$$\text{Cot } B = \text{Cot } b \sin p$$
$$\text{Cot } P = \text{Cot } p \sin b \text{ (VII.)} \Big\} \text{ (2)}$$

oder

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\sin p} \text{ (11.)}$$

tang g

$$\text{tang } P = \frac{\text{tang } p}{\text{sin } b} \quad (11)$$

2) die Hypothenuse

$$\text{Cos } h = \text{Cos } b \text{ Cos } p \quad (III) \; [1]$$

III.

Die Hypothenuse und ein Winkel;

Man verlangt:

1) den dem gegebenen Winkel entgegenstehenden Catheten

$$\left.\begin{array}{l} \text{sin } b = \text{sin } h \,.\, \text{sin } B \\ \text{sin } p = \text{sin } h \text{ sin } P \end{array}\right\} \; (I) \; (5)$$

2) den an dem gegebenen Winkel liegenden Catheten.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang } p = \text{Cos } B \,.\, \text{tang } h \\ \text{tang } b = \text{Cos } P \,.\, \text{tang } h \end{array}\right\} \; (VIII) \; (4)$$

3) den andern Winkel

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cot } B = \text{Cos } h \,.\, \text{tang } P \quad (VI) \\ \text{Cot } P = \text{Cos } h \text{ tang } B \; (VIIII) \end{array}\right\} \; (3)$$

IV.

Ein Cathete und der ihm entgegen stehende Winkel;

Man soll finden:

1) den anliegenden Winkel

$$\left.\begin{array}{l} \text{sin } P = \dfrac{\text{Cos } B}{\text{Cos } b} \quad (IV) \\ = \text{Cos } B \,.\, \text{sec } b \; (4. \text{Erk. } 5. \text{ 3.}) \end{array}\right\} \; (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin B &= \frac{\mathrm{Cof}\, P}{\mathrm{Cof}\, p} \\ &= \mathrm{Cof}\, P \,.\, \mathrm{fec}\, p \end{aligned}\right\} (11)$$

2) den andern Catheten

$$\left.\begin{aligned} \sin p &= \frac{\mathrm{Cot}\, B}{\mathrm{Cot}\, b} \quad (VII) \\ &= \mathrm{Cot}\, B \,.\, \mathrm{tg}\, b \quad (5.\ \text{Erkl. 2. 3.}) \end{aligned}\right\} (9)$$

$$\sin b = \frac{\mathrm{Cot}\, P}{\mathrm{Cot}\, p}$$

$$= \mathrm{Cot}\, P \,.\, \mathrm{tang}\, p$$

3) Die Hypothenuse

$$\left.\begin{aligned} \sin h &= \frac{\sin b}{\sin B} \quad (I) \\ &= \frac{\sin p}{\sin P} \\ &= \sin b\, \mathrm{Cof} B \\ &= \sin p\, \mathrm{Cof} P \end{aligned}\right\} (10) \quad \left.\begin{aligned} &\\ &\\ &\\ &(5.\ \text{Erk. 1. 3.}) \end{aligned}\right\}$$

V.

Ein Cathete und der anliegende Winkel;

Man sucht:

1) den andern Winkel

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Cof}\, P &= \frac{\sin B}{\mathrm{Cof}\, p} \quad (IV) \\ \mathrm{Cof}\, B &= \frac{\sin P}{\mathrm{Col}\, b} \end{aligned}\right\} (7) \quad (11)$$

2) den

2) den andern Catheten

$$\left.\begin{aligned} \text{tang } b &= \text{tang } B \,.\, \text{sin } p \text{ (II)} \\ \text{tang } p &= \text{tang } P \text{ sin } b \end{aligned}\right\} (8)$$

3) Die Hypothenuse

$$\left.\begin{aligned} \text{Cot } h &= \text{Cot } p \text{ Cos } B \text{ (V)} \\ &= \text{Cot } b \text{ Cos } P \end{aligned}\right\} (6)$$

VI.

Die beyden Winkel an der Hypothenuse.

Es wird gesucht:

1) ein Cathete

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos } b &= \frac{\text{Cos } B}{\text{sin } P} \text{ (IV)} \\ &= \text{Cos } B \,.\, \text{Cosec } P \\ \text{Cos } p &= \frac{\text{Cos } P}{\text{sin } B} \\ &= \text{Cos } P \,.\, \text{Cosec } B \end{aligned}\right\} (16)$$

2) die Hypothenuse

$$\left.\begin{aligned} \text{Cos } h &= \frac{\text{Cot } P}{\text{tang } B} \text{ (IX)} \\ &= \text{Cot } P \text{ Cot } B \end{aligned}\right\} (15)$$

Weil die trigonometrischen Linien verschiedener Winkel gleich groß seyn können; so wird bey Berechnung dieser Dreyecke oft zweifelhaft, ob das Gesuchte kleiner oder größer als 90° sey.

Folgende Zusätze nun geben Kennzeichen, nach den man meistens die Beschaffenheit des Gesuchten ausmachen kann.

1. Satz. 5. Zusatz.

Z. E. im ersten Falle ist . . . einerley sind.]

1) Die Proportion für den ersten Fall ist:

$$r : \mathrm{Cof}\,BA = \mathrm{Cof}\,PA : \mathrm{Cof}\,PB.$$

2) Wenn nun jeder der beyden Schenkel, BA, PA, kleiner als 90° ist; so ist auch die Hypothenuse $PB < 90°$.

Denn in diesem Falle ist Cof BA, und Cof PA, bejaht; (eb. Tr. 3. Erkl. 3. Z.); und r ist allezeit positiv; also auch Cof PB; (Ar. I. 108.): Folglich $PB < 90°$.

3) Sind hingegen beyde Schenkel, einer wie der andere, größer als ein Quadrante; so ist die Hypothenuse ebenfalls $< 90°$.

Denn da nur solche Dreyecke in Betrachtung kommen, wo jede Seite $< 180°$ (1. Erkl. 6. Z.), (welches man ein und für allemal zu merken hat); so ist hier sowohl Cof BA, als Cof PA negativ (eb. Tr. 3. Erkl. 2. Z.); aber Cof PB positiv; weil

$$\frac{-\mathrm{Cof}\,BA \times -\mathrm{Cof}\,PA}{r} =$$

$$\frac{\mathrm{Cof}\,BA \times \mathrm{Cof}\,PA}{r}$$

$$= +\mathrm{Cof}\,PB$$

Folglich $PB < 90°$.

3) Ist einer der beyden Schenkel $PA > 90°$ und der andere $BA < 90°$; so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Denn

Denn in diesem Falle ist Col PA negativ, und Col BA positiv: Folglich Col PB verneint (Ar. I. 108): Also PB > 90°.

4) Wäre einer von den Catheten = 90°; so ist die Hypothenuse auch = 90°, wie aus der Proportion und eb. Tr. 3. Erkl. 3. Zus. erhellet.

5) Hieraus sieht man schon, wie man aus den für die Fälle beym rechtwinklichten Kugeldreyecke gefundenen Proportionen eine Menge Lehrsätze herleiten kann, wenn man bey den gegebenen Stücken der Proportion die Lage der trigonometrischen Linien in Betracht zieht, und die ihnen zukommenden Zeichen + und — mit den Regeln der Multiplication und Division in der Arithm. I. Cap. 108, 112 §. verbindet.

6) Diese Lehrsätze lassen sich auch aus der Lage der Ebnen erweisen, aber weitläuftiger.

Um Anfänger von einem solchen Beweis ein Exempel zu geben, will ich so die vorigen Sätze (2, 3, 3', 4) für den ersten Fall, erweisen.

7) Das Kugeldreyeck PAB sey bey A rechtwinklicht; so steht die Ebne PA auf der Ebne BA senkrecht.

Nun seyen die Bögen Pa, Ba die Ergänzungen von PA, BA zu 180° und PA sowohl als BA kleiner als 90°; so ist Pa > 90° und auch Ba > 90°, und PB ist die Hypothenuse nicht für Δ PAB, sondern auch für das bey a rechtwinklichte sphärische Dreyeck aPB.

Man lege durch K eine Ebne KFHEG so, daß KB auf ihr senkrecht ist. Diese schneide die Ebne PA in KE; und die Puncte P, B, liegen nach A, an einer Seite derselben. Verlängert man daher die Ebne BP bis sie die Ebne KFHEG in KG schneidet; so ist GKB = R (Geom. II. Th. 1. Erkl.): folglich PKB < R;

Also auch BP < 90°. (1. Erkl. 1. Z.)

8) Nun sey AB < 90° und AI > 90°; so ist aB > und aI < als ein Quadrante, und BI die Hypothenuse für beyde rechtwinklichte Kugeldreyecke aIB, AIB; auch liegen B und I auf beyden Seiten der Ebne KFHEG.

Man ziehe den Bogen BI; dieser muß, ehe er nach I gelangt, gleichgedachte Ebne schneiden. Es geschehe in H. Ueberdieß schneide die Ebne BI die KFEG in KH; so ist der Winkel HKB = R (Geom. II. Th. 1. Erkl.) und der Winkel IKB > R;

Folglich BI > 90°.

9) Wenn einer der Schenkel, AE, = 90°, so steht EK auf der Ebne BA senkrecht, daher EKB = R;

Folglich EB = 90°.

10) Die Sätze (2, 3, 3', 4,) sind auch umgekehrt wahr.

1. Satz. 6. Zusatz.

Dieser Zusatz folgt aus des 1. Satzes II. Proportion.

r : sin

r : sin BA = tang B : tang PA.

In ihr sind die beyden ersten Glieder positiv, (1. Erkl. 6. Z.) wenn daher

B < 90°:

so ist tang B positiv (eb. Tr. 4. Erkl. 1, Z.): Folglich auch tang PA (Ar. I, 108);

Also PA < 90°.

Ist

B > 90°;

so hat man tang B negativ (eb. Tr. a. a. O.); also auch tang PA (Ar. I. 108):

Folglich PA > 90°

Dieß alles ist auch umgekehrt wahr.

Hierdurch entscheidet sich die Zweydeutigkeit beym 2, 5, 7, 8, 13, 16. Falle.

1. Satz. 7. Zusatz.

Dieser Zusatz fließt unmittelbar aus dem vorhergehenden. Die beyden Winkel sind die an der Hypothenuse anliegende, P, B.

Ist P spitzig, so ist es auch BA; und ist es zugleich auch B, so ist es auch zugleich PA.

Wenn P spitzig und B stumpf, so ist BA < 90° und PA > als ein Quadrante.

Dieß alles hat auch umgekehrt seine Richtigkeit.

1. Satz. 8. Zusatz.

Wenn ..... sind (III)]

Die Proportion III. im 3. Zusatze ist

r ; Cos PA = Cos BA : Cos BP

Wenn nun PA sowohl als BA kleiner als 90°; so sind beyder Bogen Cosinusse bejaht (eb. Tr. 8. Erkl. 3. Z.): Folglich auch Cos PB (Ar. I, 108.)

Also die Hypothenuse PB < 90°.

Für BA, PA größer als ein Quadrante, sind ihre Cosinusse verneint (1. Erkl. 6. Z. und eb. Tr. 3. Erkl. 2. Z.), aber Cos PB bejaht (Ar. a. a. O.)

Folglich die Hypothenuse PB < 90°.

Ist eines von den beyden Perpendikeln, PA, stumpf, das andere hingegen, BA, spitzig; so ist Cos PA verneint und Cos BA bejaht (eb. Tr. 3. Erkl. 3. Z.); Folglich Cos PB negativ. (Ar. I. 108)

Also PB > 90°.

Umgekehrt ꝛc.]

Dieß erhellet aus ähnlicher Betrachtung der Proportion III.

Durch diesen Zusatz entscheidet sich, ob beym 1. und 14. Fall, das gesuchte > oder < als 90° zu nehmen ist.

1. Satz. 9. Zusatz.

So ist die Hypothenuse BP spitzig, wenn B, und BA, oder P, und PA gleichartig sind.

BP hingegen ist stumpf, wenn B, mit BA oder, P mit PA, ungleichartig ist.

Dieß alles erhellet aus der V. Proportion im 3. Zusatze. Sie ist:

r : Cos

$$r : \text{Cof } B = \text{Cot } BA : \text{Cot } BP$$

oder

$$r : \text{Cot } BA = \text{Cof } B : \text{Cot } BP$$

Ist also BA sowohl als B kleiner als 90°, so ist Cot BA und Cof B positiv: Folglich auch Cot BP.

Also $PB < 90°$.

Wenn hingegen $BA > 90°$ und $B < 90°$, oder umgekehrt; so ist im ersten Falle Cot BA verneinend und Cof B bejaht, im andern Cof B negativ, und Cot BA positiv, in beyden also Cot PB verneinend;

Also $BP > 90°$.

Dieser Zusatz ist auch umgekehrt wahr.

Nämlich: Wenn ein Winkel (P) und die Hypothenuse (PB) gleichartig sind, so ist die anliegende Seite (PA) spitzig;

Sind aber beyde ungleichartig, so ist sie stumpf.

Denn aus obiger Proportion

$$r : \text{Cot } BA = \text{Cof } B : \text{Cot } PB$$

wird die

$$\text{Cof } B : \text{Cot } PB = r : \text{Cot } PA$$

woraus der Satz mittelst eb. Tr. 3. Erkl. 3. Z. i 5. Erkl. 4. Z. und Ar. I, 112 folgt.

Wenn die Hypothenuse (PB) und ein Perpendikel (PA) gleichartig sind; so ist der eingeschlossene Winkel (P) spitzig; aber stumpf, wenn sie ungleichartig.

Denn

Denn aus

$$r : \text{Cof } BA = \text{Cof } B : \text{Cot } PB$$

wird

$$\text{Cof } BA : r = \text{Cot } PB : \text{Cof } B$$

woraus der Satz fließt.

Durch diesen Zusatz entscheidet sich die Zweydeutigkeit beym 4, 6, 12. Falle.

1. Satz. 10. Zusatz.

So ist der Winkel P spitzig, wenn die Hypothenuse PB und der andere Winkel B gleichartig sind; aber stumpf, wenn sie ungleichartig.

Denn in der Proportion (3. Z. VI.)

$$r : \text{Cof } PB = \text{tang } P : \text{Cot } B$$

wird Cot B, positiv, also $B < 90°$, wenn beyde, Cof BP, und tang P, positiv oder negativ, also beyde entweder kleiner oder größer als 90°; da hingegen Cot B negativ wird, also $B > 90°$, wenn eine von den beyden Größen Cof PB, tang P, negativ, oder PB, P ungleichartig.

Dieß ist auch umgekehrt wahr.

Hierdurch beurtheilt man beym 3. und 15. Falle, ob das Gesuchte $<$ oder $>$ als 90° sey.

1. Satz. 11. Zusatz.

Bey dem . . . . . aus 6. Zusatz.]

Die Proportion beym 5. Fall ist

$$r : \sin BP = \sin B : \sin PA$$

und die beym 13. Fall:

$$\sin BP : r = \sin PA : \sin B;$$

Bey-

Beyder Glieder sind also lauter Sinusse, welche so wohl für Bogen und Winkel, unter und über 90°, [über 180° kommen keine vor (1. Erkl. 6. Z.)] bejaht sind; folglich läßt sich die Zweydeutigkeit des Gesuchten nach des 5. Zusatzes, hier nicht entscheiden.

Diese Entscheidung aber kann nach dem 6. Zusatze geschehen.

Wäre also in der Proportion beym 5. Falle B $< 90°$ gegeben; so müßte man PA $<$ als einen Quadranten nehmen, da hingegen für B $> 90°$, auch PA $> 90°$ genommen werden muß.

Z. B. sey PB $= 60°$;

B $= 23° 30'$;

so findet man, wenn mit Logarithmen gerechnet wird,

log sin PA $= 9,5382313$

welcher in den Tafeln den für $20° 12'$ am nächsten kommt.

Ausser dem 6. Zusatze nun, wäre es zweydeutig, ob PA $= 20° 12'$ oder $= 180° - 20° 12'$, weil für beyde Bogen dieser künstliche Sinus gehört.

Nach ihm aber, weiß man, daß, da B $= 23° 30'$ gegeben, PA $= 20° 12'$ seyn müsse.

Dieß Exempel dient auch zur Erläuterung des Gebrauchs nächst vorhergehender Zusätze.

Ist in der Proportion beym 13. Falle, PA $<$ $90°$ gegeben; so findet sich auch B $< 90°$; aber für PA $> 90°$ erhält man auch B $> 90°$.

aber beym ꝛc.]

Beym 9, 10, 11. Fall läßt sich die Zweydeutigkeit des Gesuchten blos aus den gegebenen Grössen, nicht entscheiden.

Man muß hier aus den Bedingungen der Aufgabe sehen, ob das Gesuchte $> $ oder $< 90°$ zu nehmen sey.

Daß dieß aber bey gedachten Fällen so ist, kann man schon aus dasigen Proportionen sehen. Es erhellet aber auch auf folgende Art:

Das Kugeldreyeck BPA (Fig. 3) sey bey A rechtwinklicht, und b der zweyte Durchschnittspunct der Kreise BP, BA (Geom. 49. S. 3, 5. Z.).

Von b nehme man

$$bp = BP;\ ba = BA,$$

und ziehe den Bogen pb.

So ist der

$$W.\ B = b,$$

weil beyde $=$ der Ebnen BA, PB Neigung sind (G. 52. S. 4. Z.);

Nun lege man in Gedanken das Dreyeck pba dergestalt auf das BPA, daß b auf B, und bp, ba, längst BP, BA, fällen; so kommt p auf P und a auf A zu liegen:

Daher deckt der Bogen bp dem BP und ist folglich

$$PB = bp,$$

überdieß auch der Winkel

BPA

$BPA = apb$;

mithin das

Kugeldreyeck $PBA =$ dem Kugeldreyecke pba.

Der Perpendikel pa also, ist beyden Kugeldreyecken apb, apB, welche an der Grundlinie gleiche Winkel, $b = B$, haben, gemein; und die Hypothenuse Bp und Grundlinie Ba des einen ist der Hypothenuse, pb, und Grundlinie ba des andern Dreyecks Ergänzung zu 180°, so wie der Winkel Bpa des Winkels P oder apb.

Daher kann bey vollkommen gleichen gegebenen Dingen das Gesuchte in diesen drey Fällen, auch Ba, (9. Fall) Bp, (10. Fall) Bpa (11. Fall) seyn.

1. Satz. 12. Zusatz.

In der 6. und 7. Figur sey das Kugeldreyeck BPA bey A rechtwinklicht.

Nun kann der Winkel BPA spitzig oder stumpf, folglich auch BA $<$ oder $>$ als ein Quadrant seyn.

BA sey erstlich $> 90°$ (6. Fig.), und man nehme darauf $BD = 90°$; so fällt D zwischen B und A, und es ist

1) $AD = BA - BD$
$= BA - 90°$

Man ziehe den Bogen PD; so ist der Winkel

2) $DPA = BDA - BPD$
$= BPA - 90°$; (Geom. 52. S. 2. und 4. Z.)

und

$DP = B$ (Geom. a. O.)

BA sey zweytens $< 90°$; (wie in der 7. Fig.) und man verlängere BA bis $BD = 90°$; so fällt D über A hinaus, und es ist daher

4) $DA = BD - BA$
$= 90° - BA$
$= - BA + 90°$;

Zieht man nun DP; so ist

5) $BPA = BPD - APD$
$= 90° - APD$
$= - APD + 90°$ (S. a. D.)

und auch in diesem Falle

$DP = B$.

Will man nun für DA und DPA beyde Fälle in einem Ausdruck bringen, wie im Buche geschehen ist, so erinnere man sich, daß

I) $DA = + BA - 90°$ (1)
II) $DA = - BA + 90°$ (4)

Ferner

I) $DPA = + BPA - 90°$ (2)
II) $DPA = - BPA + 90°$ (5)

Folglich

$$DA = + BA \mp 90°$$

und

$$DPA = \pm BPA \mp 90°$$

Also läßt ꝛc. (S. Buch.)

Von schiefen Dreyecken.

2. Satz. 1.

Vielleicht ist Anfängern die VI. Fig. für 1, 2, 3 der Auflösung dieses Satzes und die VII. für 4, 5 ꝛc. deutlich,

deutlich, wo in beyden einerley Buchstaben, einerley mit der 5, im Buche bedeuten.

Auf dem . . . . . der 5. Figur]
Das ist der Kreis ATatQA.

so ist . . . . . stumpfen]
So ist, (weil das Kugeldreyeck PAD sowohl als Pad, jenes bey A dieses bey a rechtwinklicht, und das Perpendikel PA, in jenem einem spitzigen Winkel, in diesem aber der Cathete Pa einem stumpfen gegenübersteht,) PA spitzig oder $< 90°$ und Pa stumpf oder $> 90°$.

Nun liegt A zwischen D und d, auf der Seite, auf der der schiefe Halbkreis die spitzigen Winkel ADP, AdP macht; folglich fällt PA, des senkrechten Halbkreises APa spitziger Bogen, auf diese Seite.

Auch a befindet sich zwischen D und d; aber auf der Seite des schiefen Halbkreises, auf der er die stumpfen Winkel aDP adP macht. Daher liegt Pa, des senkrechten Halbkreises APa stumpfer Bogen auf gleichgedachte Seite.

Hieraus hat man den Satz:

Eines senkrechten Kreises ꝛc. (S. Buch.)

2. Satz. 2.

Durch P lege man einen andern Halbkreis BPp auch schief; so macht dieser gleichfalls mit dem Grunde zweene spitzige und zweene stumpfe Winkel (Geom. 52. S. 4. B.). Jene seyen ABP, AbP, diese abP, aBP.

Ist nun der schiefe Halbkreis BPb so gelegt, daß BA spitzig oder kleiner; also Ba stumpf oder größer als ein Quadrant ist, so ist PB, (die Hypothenuse beyder rechtwinklichten Kugeldreyecke PAB, PaB,) spitzig (1. S. 8. Z.).

2. Satz. 3.

Die Figur (5; oder VI) stellt also vier schiefe Kugeldreyecke vor:

I) Das Δ BPD, dessen beyde Winkel PBA, PDA am Grunde spitzig. (1, 2)

II) Das Dreyeck bPd, in dem die beyden Winkel Pda, Pba am Grunde stumpf (1, 2).

III) Das Dreyeck PbD, wo der eine Winkel PDb am Grunde stumpf (1) und der andere PbD spitzig (2);

IV) Das Δ BPd, dessen eine Winkel PBd am Grunde stumpf (2), der andere PdA aber spitzig (1).

Jedes schiefe Kugeldreyeck gehört zu einem dieser viere.

Denn eines solchen Dreyecks Winkel am Grunde, oder seiner Grundlinie, sind entweder, beyde spitzig oder stumpf, oder der eine ist spitzig und der andere stumpf, oder der andere spitzig und der eine stumpf.

Ist daher ein schiefes Kugeldreyeck gegeben, und man verlängert seine Schenkel bis sie desselben Grundlinie Ebne schneiden, oder = 180° werden

den (Geom. 49. 5. Z.); so erhält man mit dem gegebenen, die vier schiefen Kugeldreyecke.

Im Dreyecke III, ist der stumpfe Winkel PDb am Grunde, des I. Dreyecks einen spitzigen Winkels PDA Ergänzung zu 180°. Und weil PDb = Pda, dem einen stumpfen Winkel des Dreyecks (indem beyde = des Kreises Dpd Neigung gegen den Grund sind); so ist auch Pda diese Ergänzung. Der spitzige Winkel PbD aber ist des Dreyecks II. einen stumpfen Winkel Pba = PBA (G. 52. S. 4. Z.) Ergänzung zu 2 R.

Des Dreyecks III. Seite PD, die an dem stumpfen Winkel anliegt, ist des I. Dreyecks Seite an dem spitzigen Winkel der des stumpfen PDb Complement zu 180° ist. Die andere Seite des III. Dreyecks hingegen, ist die des II, welche an dem stumpfen Winkel PbD liegt, der des spitzigen PbD im Dreyecke III, Ergänzung zu 180° ist.

Im Dreyecke IV. ist der spitzige Winkel PaB am Grunde des andern stumpfen Winkels des Dreyecks II, Complement zu 2 R, da hingegen der stumpfe PBd es des I Dreyecks andern spitzigen Winkels PBA, ist. Leztere Ergänzung ist auch der Winkel Pba, weil PBD = Pba (Geom. 52. S. 4. Z.).

Die Seite PB im Dreyecke IV. am stumpfen Winkel, ist die andere Seite des I, Dreyecks an dessen spitzigen Winkel PBA, wovon PBD die Er-

gänzung zu 180° ist. Aber die andere Seite Pd, ist die andere des II. Dreyecks, die an dessen stumpfen Winkel Pda, von dem der spitzige PdB das Complement zu 180° ist, anliegt.

Im Dreyecke I. ist die Grundlinie, oder der Grund, BAD, und A liegt zwischen B und D, daß also das spitzige Perpendikel PA innerhalb dieses Dreyecks fällt, wie es nach (1) seyn soll.

Aus gleicher Ursache fällt auch das stumpfe Perpendikel Pa innerhalb des Dreyecks II. dessen Grundlinie der Bogen dab ist.

Des Dreyecks III. Grundlinie ist der Bogen Db, und A liegt in der Verlängerung von bD auf der Seite des stumpfen Winkels PDA; folglich fällt auch das spitzige Perpendikel PA ausserhalb des Dreyecks III, und ist dessen stumpfen Winkel am nächsten.

Auf ähnliche Art sieht man, daß das stumpfe Perpendikel Pa ausserhalb des Dreyecks IV, so fällt, daß es dessen spitzigen Winkel PdB am Grunde am nächsten liegt.

Aus alle den folgt:

Wenn die Winkel am Grunde oder der Grundlinie eines schiefen Kugeldreyecks gleichartig sind, fällt das Perpendikel, daß von seiner Spitze auf seine Grundlinie gezogen, innerhalb des ꝛc. (S. Buch).

2. Satz. 4.

Nach dem 2. Fall der Tafel des 1. S. 4. Z. wird aus den beyden Perpendikeln der Winkel an der Grundlinie gesucht.

Nun sind in dem rechtwinklichten Kugeldreyeck PAD (VII. Fig.), die beyden Catheten PA, AD, und PDA der Winkel an der Grundlinie AD, oder des Dreyecks I. eine spitzige Winkel.

Wenn man also in der Proportion beym 2. Falle AD statt BA und PDA statt B sezt; so hat man

$$r : \sin AD = \cot PA : \cot PDA$$

folglich

$$\cot PDA = \frac{\sin AD \times \cot PA}{r}$$

oder, wenn $r = 1$ (eb. Trig. 19. S. Anm.)

$$\cot PDA = \cot PA \times \sin AD. \text{ (1. S. 4. Z.)}$$

Wenn man in der ebnen Trigonometrie das Verhalten der trigonometrischen Linien bey der Veränderung ihrer Bogen wohl gefaßt hat; so wird man das folgende ohne Schwierigkeit verstehen.

2. Satz. 5.

Nach 1. S. 4. Z. Tafel 2. Fall ist, im rechtwinklichten Kugeldreyeck Pad (wenn ebenfalls $r = 1$,)

$$\cot Pdb = \cot Pa \times \sin ad.$$

Weil nun d zugleich mit D fortrückt; so wächst ad, und folglich auch sin ad (da Pa ungeändert bleibt); mithin ebenfalls Cot Pdb:

Da aber Pdb stumpf, und die Cotangenten mit den Bogen zwischen 90° und 180° wachsen; so nimmt also auch Pdb, (der stumpfe Winkel am Grunde im Dreyecke II, und die Ergänzung des vorigen Winkels PDA zu 2 R,) zu, indem d von a nach q rückt;

Wird

$$ad = aq = 90°;$$

so wird

$$\sin ad = 1;$$

folglich alsdann

$$\text{Cot } Pdb = \text{Cot } Pa,$$

und also

$$Pdb = Pa.$$

So bald d über q hinaus; so bald nimmt gedachter Winkel Pdb wieder ab, weil alsdenn sin ad und also auch Cot Pdb wieder abnimmt. Dieses Abnehmen geht fort bis d durch δ in B rückt, wo

$$Pdb = PBa = Pba$$

wird.

2. Satz. 7.

Eben so . . . . . wo ꝛc.]

Es ist kaum nöthig anzuführen, daß die für Col PD hier gegebene Formel aus der Proportion beym 1. Fall in der Tafel mit gehöriger Anwendung auf das Dreyeck PAD folgt.

In Q . . . . . in b fällt.]

Wenn D in Q rückt, daß also

$$AD = AQ$$
$$= 90°;$$

so wird

$$\text{Cof } AD = \text{Cof } AQ$$
$$= \text{Cof } 90°$$
$$= 0;$$

folglich aus

PD, wird PQ,

und

$$\text{Cof } PD = \text{Cof } PA \times 0$$
$$= 0;$$
$$= \text{Cof } PQ$$

aber eines Bogens von 90° Cosinus ist 0; Also ist

$$PD = 90°$$
$$= PQ.$$

Rückt D immer weiter fort über Q hinaus nach Δ; so wird

$$PD = P\Delta, \text{ und}$$
$$A\Delta > 90°;$$

folglich Cof A Δ verneinend, mithin auch Cof PD oder Cof P Δ; folglich P Δ stumpf. In diesem Falle aber wächst Cof Δ A mit dem Bogen AΔ selbst (eb. Trig. 3. Erkl. 3. Z.); also auch der stumpfe Bogen P Δ, bis Δ in b fällt, wo er gleich Pb wird.

Weiter geht diese und dergleichen Veränderung vermöge 1. Erkl. 6. Z. nicht.

2. Satz. 8.

$$\text{Cof } Pd = \text{Cof } Pa \cdot \text{Cof } ad \text{ (1. S. I. Fall.}$$
$$= -\text{Cof } PA \cdot \text{Cof } ad.$$

Wo der erste Factor ebenfalls ungeändert bleibt, und im Dreyecke II. (3) der Bogen Pd stumpf ist.

Wenn nun d nach q rückt; so bleibt Pd stumpf bis d in q fällt, daß

$$aq = 90°,$$

da alsdenn

$$\begin{aligned} \text{Cof } ad &= \text{Cof } aq \\ &= \text{Cof } 90° \\ &= 0; \end{aligned}$$

folglich auch

$$\text{Cof } Pd = 0,$$

und also

$$Pd = 90°.$$

Rückt d über q hinaus in δ; so wird

$$ad = a\delta,$$

also

$$> 90°;$$

folglich

$$\text{Cof } ad, \ (= \text{Cof } a\delta,) \text{ verneinend,}$$

und

$$\text{Cof } Pd = + \text{Cof } PA \times - \text{Cof } a\delta:$$

Also Pd spitzig.

1. Satz. 9.

Uebersicht der bisherigen Betrachtungen (4, 5, 6, 7, 8, 9.)

I) Wenn man in schiefen Kugeldreyecken, wie I, II, (5) von ihren Spitzen auf die Grundlinien senkrechte Bogen, oder Perpendikel, (in jenem PA, in

in diesem Pa,) fällt; so theilen diese die Grundlinien in zween Theile (3).

Je näher nun im Dreyecke I. der eine Theil, AD dem Quadranten kommt, desto kleiner wird der an diesem Theile anliegende spitzige Winkel PDA, und wenn AD = 90°, ist er dem Perpendikel PA gleich; Für AD > 90° wird er wieder größer, und nähert sich dem Winkel BbA indem AD sich dem Bogen AB nähert; Wird AD = AB; so wird dieser Winkel PDA = PbA = dem andern spitzigen Winkel PBA dieses I. oder des III. Dreyecks (4).

So lange der Theil AD spitzig ist, so lange ist es auch die an ihm liegende Seite PD des I. Dreyecks. Wenn AD = 90°, ist auch PD = 90°, für AD > als ein Quadrant ist PD stumpf, und wenn AD = Ab ist PD = der einen Seite Pb des Dreyecks II. oder III. (7)

II) Wenn im Dreyecke II (3) der eine Theil ad der Grundlinie bad, der an dem stumpfen Winkel Pda, (welcher des vorigen spitzigen Winkels PDA Ergänzung zu 2 R ist,) anliegt, wächst, so nimmt dieser Winkel zu, und wird = dem stumpfen Perpendikel Pa, wenn ad = 90° wird; Für ad > 90° nimmt er wieder ab, bis ad = aB, wo er = dem andern stumpfen Winkel PBa seines II. Dreyecks, ist. (5)

Die Seite Pd die an dem Theil ad anliegt, ist im gedachten Dreyecke für ad < 90° stumpf, für

ad = 90°, ein Quadrante, und für ad ▷ 90°, spitzig (8), und wenn ad = aB ist sie = PB, der andern Seite des I. Dreyecks.

III) In Dreyecken wie III, IV. (3) fällt das Perpendikel auf die Verlängerung ihrer Grundlinie (3).

Je näher nun im Dreyecke III, diese Verlängerung, oder AD, dem Quadranten kommt, desto größer wird der stumpfe Winkel PDb, (der an der Seite PD anliegt die sich zunächst dem Perpendikel PA, befindet). Er ist gleich der Ergänzung des spitzigen Perpendikels PA zu 180°, wenn AD = AQ = 90°, oder bD = bQ = Ab — 90°. Für bD ◁ Ab — 90° oder AD ▷ 90°, ist dieser stumpfe Winkel PDb kleiner als die Ergänzung des Perpendikels PA zu 180°, und von dem spigen Winkel PbA, dieses Dreyecks III, unendlich wenig unterschieden, wenn dD unendlich klein, oder AD von AB unendlich wenig unterschieden ist. (6)

Die Seite PD die im Dreyecke III, dem Perpendikel am nächsten liegt, ändert sich wie im Dreyecke I. Nämlich: PD ist für AD ◁ 90° oder bD ▷ 90° spitzig; für AQ = 90° oder bD = bQ ein Quadrante, für AD ▷ 90° stumpf, und für ein unendlich kleines bD von Pb unendlich weniger unterschieden. (9)

IV) Im Dreyecke IV, (3) nimmt der spitzige Winkel PdB ab, wenn ad, der Bogen der Grundlinie dieses Dreyecks, der zwischen der Seite Pd, die an

den

dem spitzigen Winkel anliegt, und dem stumpfen Perpendikel Pa, enthalten ist, zu- und also die Grundlinie Bd abnimmt. Dieß geschiehet, bis $ad = aq = 90°$, oder $Bd = Bq = aB - 90°$, wo alsdann PdB die Ergänzung des stumpfen Perpendikels Pa zu 2 R ist. Für $ad > 90°$ wird $PdB >$ als gleichgedachte Ergänzung, und für ein unendlich kleines Bd, wird PdB unendlich wenig von PBA unterschieden seyn. (4, 5, 6)

Die Seite Pd im Dreyecke III. ändert sich wie im Dreyecke II, weil sie beyden gemein. (8)

1. Satz. 10.

Wofern

$$AD < AB;$$

so nehme man

$$AT = AD;$$

lege durch P, und T einen schiefen Halbkreiß TPt, dessen stumpfe Winkel PTa, Pta und spitzige PTA, Ptb seyn mögen.

Nun ist in dem bey A rechtwinklichten Dreyecke, (wenn $r = 1$,)

$$\text{Cos}\, PT = \text{Cos}\, PA \,.\, \text{Cos}\, AT$$

und in dem PAD

$$\text{Cos}\, PD = \text{Cos}\, PA\, \text{Cos}\, AD$$

(wie die Proportionen der Tafel des 1. S. 4. 3. beym 1. Fall geben).

Da aber

$$AD = AT \text{ (wie angenommen)}$$

so ist auch

$$\text{Cof PT} = \text{Cof PA Cof AD};$$

Folglich

$$\text{Cof PT} = \text{Cof PD}$$

mithin

I) $PT = PD$.

Ferner: weil

$$\left.\begin{aligned}\text{Cot PTA} &= \text{Cot PA sin AT}\\ \text{Cot PDA} &= \text{Cot PA sin AD}\end{aligned}\right\} \text{(a.D.2.Fall)}$$

und

$$AT = AD;$$

so ist auch

$$\text{Cot PTA} = \text{Cot PA} \cdot \text{sin AD};$$

folglich

$$\text{Cot PTA} = \text{Cot PDA}$$

Also:

II) $PTA = PDA$.

Ueberdieß ist

$$\text{III) PTB} = 2R - \text{PTA} = 2R - \text{PDA (II)}$$

Auf ähnliche Art erhellet, daß

$$Pt = Pd$$
$$Pta = Pda$$
$$Ptb = 2R - Pda.$$

2. Satz. 11.

Es ist aber alsdann PT oder PD $<$ PB;

Denn wenn man T von A nach B, wie vorhin (in 7) D von A nach b rücken läßt, so erhellet, auf ähnliche Art wie a. a. O. daß der Bogen PT anfangs

fangs spitzig ist und zunimmt, bis er für AT = 90° auch so groß wird; wächst hernach AT weiter, und wird also > 90°; so wird auch PT stumpf, und wächst mit AT, bis AT = AB, wo dann erst

PT = PB.

Mit Pd verhält sich die Sache in Rücksicht Pb umgekehrt: Es ist nämlich Pd oder Pt > Pb.

Dieß erhellet auf ähnliche Art wie in 8, wenn man t von nach a b wie a. a. O. d von a nach B rücken läßt.

Denn man sieht so, daß Pt beständig abnimmt; anfangs stumpf, bis at = 90°, wo Pt = Pa, nachgehends aber spitzig, ist, und erst = Pb wird, wenn t in b fällt.

Hieraus und aus 10 ergeben sich folgende Sätze (12, 13, 14, 15.)

2. Satz. 12.

Wenn man das Dreyeck I. (3) oder PDB, und das Dreyeck PBT betrachtet, so sieht man, (nach 10, 11) daß im leztern der Winkel PTB stumpf und PBA spitzig, wie im Dreyeck IV (3) ist; überdieß, daß in demselben die eine Seite PT = der einen Seite PD des Dreyecks I, und beyde Dreyecke den Winkel B und die Seite PB, welche gröser als PT oder PD, gemein haben.

Wenn daher im Dreyecke I (3) die zwo Seiten BP, PD, und der Winkel PBA, der an der einen

Seite

Seite PB anliegt, gegeben ist; so kann aus eben den gegebenen Dingen, ein Dreyeck PTB, wie IV (3) gemacht werden, in so ferne die an dem gegebenen Winkel anliegende Seite größer als die andere, oder PB > PD, ist.

Dieß aber geschiehet nicht, wenn PB = PD oder < PD ist, weil T für PD oder PT = PB, in B, und für PD oder PT > PB, über B nach d zu fallen muß, also in beyden Fällen, AD nicht kleiner als AB ist, welches doch in 10, und 11 vorausgesezt wird. In diesen lezten Fällen nun ist der an PD anliegende Winkel PDA allemal spizig, wie aus (4) erhellet.

Da im Dreyecke I (3) die Winkel am Grunde spizig, also auch die ihnen entgegenstehenden Seiten und PTB = PDb; so hat man folgendes:

Wenn in einem schiefen Kugeldreyecke PBD ein Winkel PBA und die an ihm liegende Seite PB spizig, überdem die diesem Winkel gegenüberstehende Seite PD kleiner als die an ihm liegende PB ist; bestimmen diese genannten Stücke den an PD anliegenden spizigen Winkel PDA, sowohl als dessen Nebenwinkel PDb = PTB; d. h. PDA ist zweydeutig.

Wäre hingegen PB = PD oder < PD; so bestimmt sich allemal durch PBA, PD, PB, der an PD liegende spizige Winkel PDA.

2. Satz. 13.

Das Dreyeck Pbt hat am Grunde einen stumpfen

pfen Winkel Pbt und einen spitzigen Ptb, wie das Dreyeck III (3). Es hat überdieß mit dem Dreyecke II oder Pbd den Winkel b, und die an ihm liegende Seite Pb, gemein, auch ist in diesem Dreyecke Pbt, die andere Seite Pt = der andern Pet des II (3) Dreyecks (10); und die beyden gemeinschaftliche Seite Pb ist kleiner als die andere Pd oder Pt jedes Dreyecks. (11 u. d. E.)

Sind daher in dem Dreyecke II die zwo Seiten Pb, Pd und zwar Pb < Pd, und der Winkel Pba der an der kleinern Pb, anliegt, gegeben; so kann daraus auch ein Dreyeck, Pbt, wie III (3) werden.

Dieß geschiehet aber nicht, wenn Pd = Pb oder < Pb, weil da nicht AD < AB oder ad < ab, wie doch 10 und 11 voraussezt. In diesem Falle nun ist der an Pd anliegende Winkel Pda allemal stumpf, wie man sich leicht aus (5) überzeigen kann.

Da im Dreyecke II die Winkel am Grunde stumpf, also auch die ihnen entgegenstehenden Seiten und der Winkel PdA = PtA; so hat man folgendes:

Wenn in einem schiefen Kugeldreyeck Pbd, ein Winkel Pba und die an ihm liegende Seite Pb stumpf, überdieß die dem Winkel Pba entgegenstehende Seite Pd, größer als die anliegende Pb, ist; so kann man dadurch den an Pd liegenden stumpfen Winkel Pda sowohl als dessen Nebenwinkel PdA bestimmen; oder Pda ist zweydeutig; Hingegen

gen für Pd = oder < Pb, bestimmt sich allemal der stumpfe Winkel Pda.

2. Satz. 14.

Das Dreyeck III oder PDb hat mit dem Dreyecke PTb die Seite Pb und den an ihr liegenden spitzigen Winkel PbD gemein, auch ist in jenem die Seite PD = der Seite TP in diesem; überdieß ist PT oder PD < PB; aber PB = 2 R — Pb; also PD < 2 R — Pb. (10, 11)

Wenn also im Dreyecke III, der spitzige Winkel PbD am Grunde und die zwo Seiten PD, Pb, so, daß PD < 2 R — Pb gegeben; so kann man daraus auch ein Dreyeck, TbP, wie I, (3) machen. Dieß geschiehet aber nicht, wenn PD = 2 R — Pb oder > 2 R — Pb (10, 11); in diesen lezten Fällen ist PDb, der an PD liegende Winkel, allemal stumpf. (6)

Die Stücken PbD, Pb, und PD < 2 R — Pb, können folglich, so wohl den stumpfen Winkel D im Dreyecke PDb, oder im Dreyecke PTb den Winkel PTA, = PDA, den Nebenwinkel von PDb, bestimmen; oder der an PD liegende Winkel ist zweydeutig; In allen andern Fällen der Seite PD nur den stumpfen Winkel D.

2. Satz. 15.

Auf ähnliche Art erhellet (wie in 14) daß aus den gegebenen Dingen PBd, PB, Pd, im Dreyecke IV (3) auch ein Dreyeck PtB, wie II, gemacht werden kann, wenn PB > PT oder PD, d. i. > 2 R — Pd;

— Pd; sonst aber nicht, und ist im lezten Falle PdB allemal spitzig. (6)

Es bestimmen also gedachte Stücken im ersten Falle, den Winkel an Pd zweydeutig; im lezten aber spitzig.

2. Satz. 17.

In (4) sey

$$A\Delta = 2R - AD;$$

also das Complement von AD zu 2 R; so ist

$$\begin{aligned} \text{Cot}\, P\Delta A &= \text{Cot}\, PA \sin A\Delta \quad (1.\,\text{S. 4. 3. Tf. 2. Fall}) \\ &= \text{Cot}\, PA \sin (2R - AD) \\ &= \text{Cot}\, PA \sin AD \quad (\text{eb. Tr. 2. Erkl. 2. 3.}) \end{aligned}$$

aber auch

$$\text{Cot}\, PDA = \text{Cot}\, PA \sin AD \quad (4)$$

Folglich

$$\text{Cot}\, P\Delta A = \text{Cot}\, PDA$$

Also

$$P\Delta A = PDA.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \text{Col}\, A\Delta &= \text{Col}\, (2R - AD) \\ &= -\text{Col}\, AD \quad (\text{eb. Tr. 3. Erkl. 2 3.}) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \text{Col}\, P\Delta &= \text{Col}\, PA\, \text{Col}\, A\Delta \quad (1.\,\text{S. 4. 3. Tf. 1 Fall}) \\ &= \text{Col}\, PA \times -\text{Col}\, AD \\ &= -\text{Col}\, PA\, \text{Col}\, AD \end{aligned}$$

aber

$$\text{Col}\, PD = \text{Col}\, PA\, \text{Col}\, AD$$

Folglich:

$$\text{Cof } P\Delta = - \text{Cof } PD$$
$$= \text{Cof } (2R - PD) \quad \text{[eb. Tr. 3. Erkl. 2. Z.]}$$

also

$$P\Delta = 2R - PD;$$

und da

$$PD = PD$$

So ist:

$$P\Delta + PD = 2R$$

Wenn Δ in b fällt; so wird $A\Delta = Ab$ und am größten (4); aber

$$Ab = bAB - AB,$$

und

$$bAB = 180° = 2R \text{ (S. 49. S. 5. Z.)};$$

also:

$$Ab \text{ oder das größte } \Lambda\Delta = 2R - AB;$$

Folglich, wenn

$$AD = AB,$$

ist AD am kleinsten, nämlich das AD dessen D ein hier bestimmtes Δ, das allemal von A um $2R -$ AD entfernet ist, zugehört; oder dessen Ergänzung zu 2 R, $A\Delta$ ist.

Aber für

$$AB = AD$$

ist

$$\text{Cot } PDA = \text{Cot } PBA \text{ (4; 1. S. 4. Z. T. 2. Fall)}$$

also

$$PDA = PBA$$

Folglich

Folglich

für AD > AB

ist der Winkel

ADP < ABP (4)

weil AB spitzig angenommen ist (2), und es also größere spitzige AD giebt.

Es giebt aber so viel solche größere spitzige AD; so viel es stumpfe AΔ giebt; denn der spitzigen und stumpfen Bogen Endpuncte, liegen innerhalb gleichen Bogen; jene nämlich, endigen sich alle innerhalb eines Bogens, der = 90° weniger dem kleinsten AD, oder = AQ — AB, (weil AQ = 90° angenommen (4) und AB das kleinste AD) ist, und diese innerhalb des Bogens, der = dem größten AΔ weniger 90°, oder = Ab — 90° = Ab — AQ.

Es ist aber AQ — AB = Ab — AQ;

Denn AQ + AQ = 2 R, und Ab + AB ist auch = 2 R; folglich AQ + AQ = Ab + AB, woraus die Gleichheit folgt.

Zu jedem dieser AD nun, gehört ein Bogen AΔ, der das Complement zu 2 R ist, und dem ein Winkel PΔD = PDA, (wie zu Anfange dieses Absatzes gezeigt worden) zugehört; aber zu jedem dieser AD gehört ein Winkel ADP < ABP, (weil für solche AD > AB, gedachte Winkel nach (4) so sind, wie vorhin da gewesen); und jeder Winkel ADP > ABP gehört zu einem AD < AB, weil nach (4,) ADP abnimmt, wenn AD wächst, folg-

lich zunimmt, wenn AD abnimmt, also für ein kleineres AD größer wird.

Diese bisherige Betrachtung leitet für die Seiten der Dreyecke (3) auf ähnliche Sätze, wie die 12, 13, 14, 15, für die Winkel sind.

Nämlich: Wenn, für das Dreyeck I (3),

AD, (das Stück Bogen der Grundlinie DAB im Dreyecke PBD, das zwischen dem Perpendikel AP und der Seite PD dieses Dreyecks liegt,) nicht kleiner als AB (das andere Stücke der Grundlinie DAB, das zwischen der Seite PB und dem Perpendikel PA liegt), und AΔ, (das Stücke der Grundlinie ΔAB, des Dreyecks PΔB das zwischen PΔ und PA liegt) das Complement von AD zu 2 R ist; so ist im Dreyecke PΔB die Seite PΔ = 2 R — PD, und der an PΔ liegende Winkel PΔA = PDA, dem an PD liegenden Winkel im Dreyecke PDB; überdieß haben diese beyden Dreyecke die Seite BP und den an ihr liegenden Winkel PBA, welcher kleiner als der Winkel PDA, gemein.

Sind also im Dreyecke PDB die Seite BP, und die Winkel PBA, PDA, gegeben, und ist der lezte Winkel kleiner als der rechte; so sind diese gegebenen Dinge auch in dem andern Dreyecke PΔB enthalten, dessen zweyte Seite PΔ = 2 R — PD ist.

In diesem Falle kann demnach aus gedachten Stücken, so wohl die spizige Seite PD, als die stumpfe PΔ, die die Ergänzung von DP zu 180° ist,

ist, bestimmt werden; d. i. die Seite PD ist zweydeutig.

Dieß geschiehet aber nicht, wenn der Winkel PDB größer als der PBD ist; weil alsdann AD < als AB, (das kleinste AD,) und so AD nicht die Ergänzung von AΔ ist, welches alles doch nach dem vorhergehenden erfodert wird.

Es giebt also in diesem lezten Falle nur ein solches Dreyeck, dessen Seite PD, spitzig ist (7).

Oder: wenn von den gegebenen Stücken PB, PBD, PDB, im Dreyecke PBD, der Winkel PDB > PBA; so kann man daraus nur die spitzige Seite PD bestimmen.

2. Satz. 18.

Der Winkel

PDb = Pda
PΔb = Pδa } Geom. 52. S. 4. B.)

Also

Winkel Pδa = Pda,

wenn

PDb = PΔb.

Da

DPd, ΔPδ Halbkreise;

so sind

PD = 2 R — Pd
PΔ = 2 R — Pδ
= 2 R — PD (17)

Also

$P\delta = PD$
$Pd = P\Delta$

Folglich ergänzen die beyden Bogen $P\delta$, Pd einander zu 180°, wofern es PD, $P\Delta$ thun.

Hieraus sieht man, daß in den Dreyecken Pbd, $Pb\delta$ die Winkel $P\delta a$, Pda gleich, und

$$P\delta = 2R - Pd;$$

auch, (da Winkel $PDA < PBA$ (17), und $PDA = 2R - PDb$; $PBA = 2R - PBd$, und $PDb = Pdb$; $PBd = Pbd$)

$$2R - Pdb < 2R - Pbd,$$

d. i.

$$\text{Winkel } Pbd < Pdb;$$

wenn im Dreyecke I die dritte Seite PD oder $P\Delta$ seyn kann.

Ueberdieß haben vorhin genannte Dreyecke noch Pb und Pba gemein. Sind also im Dreyecke II (3) die stumpfen Winkel, b, d gegeben, und die an dem einen stumpfen Winkel b, anliegende Seite Pb, auch $b < d$; so kann man durch die izt genannten Dinge zwo Seiten Pd oder $P\delta$, davon die eine $P\delta$ die andere Pd zu 180° ergänzt, bestimmen; Hingegen für $b =$ oder $> d$ nur eine stumpfe Seite Pd (17, 8).

2. Satz. 19.

Vorausgesezt, daß AD nicht kleiner als AB, und das Complement von $A\Delta$ zu $2R$, ist; so ist in den Dreyecken PDb, und $P\Delta b$, (die wie das Dreyeck III (3) die Seite Pb und der Winkel PbD, der

größer

größer als PDA = 2 R — PDb (4), gemeinschaftlich, und die andere Seite PΔ des leztern Dreyecks PΔb ist = 2 R — PD oder die Ergänzung der andern Seite PD des Dreyecks PDb zu 180°; überdieß ist, da PDA = PΔA (17), der Winkel PDb = PΔb (Geom. 52. S. 4. Z.).

Wenn daher im Dreyecke III (3) die Seite Pb und die Winkel b, D am Grunde, gegeben sind; So giebt es zwey Dreyecke PDb, PΔb die diese gegebenen Dinge enthalten. Man kann also aus ihnen, in so ferne 2 R — PDb < PbD, zwo Seiten bestimmen, die einander zu 180° ergänzen,

Wenn aber unter den gegebenen Dingen b = oder < 2 R — PDb; so bestimmen sie nur eine spizige Seite PD, wie sich leicht aus dem was in 17. und dessen Erl. für das Dreyeck I gesagt wurde, ergiebet.

2. Satz. 20.

Der Winkel

P'Bd = Pbt,

und der Winkel

PdB = PDb (Geom. 52. S. 4. Z.)

auch der Winkel

PϑB = PΔD

also

PϑB = PdB

wenn

PΔD = PDA;

Ueberdieß, weil DPd, ΔPϑ Halbkreise sind, ist

$$PD = 2R - Pd,$$

und

$$P\Delta = 2R - P\delta$$
$$= 2R - PD \text{ (17)}$$

Also

$$P\delta = PD,$$

und

$$P\Delta = Pd;$$

folglich ergänzen die beyden Bogen $P\delta$, Pd einander zu 180°, wenn es die Bögen PD, $P\Delta$ thun.

Hieraus sieht man, daß in den Dreyecken PBd, $P\delta d$, der Winkel

$$PdB = P\delta B,$$

und

$$P\delta = 2R - Pd,$$

auch der Winkel

$$PdB < PBA, \text{ d. i. } < 2R - PBd$$

Wenn im Dreyecke III die dritte Seite PD oder $P\Delta$ seyn kann. Ueberdem haben vorhin genannte Dreyecke noch PB und PBd gemein, und sind wie das Dreyeck IIII (3).

Wenn daher im Dreyecke IV die am stumpfen Winkel B anliegende Seite PB, nebst B und dem spitzigen Winkel d gegeben, und $PdB < 2R - PBd$; so finden zwo Seiten Pd, $P\delta$, statt, wovon die eine $P\delta$ die andere Pd zu 180° ergänzt.

Ausserdem, wenn nämlich $PdB =$ oder $> 2R - PBd$, bestimmen vorhin gedachte Dinge nur eine stumpfe Seite Pd. (17, 8)

Lehr-

Lehrsätze zu Auflösung der schiefen Dreyecke.

Man muß acht ..... machen will].

So muß man im rechtwinklichten Dreyecke PAD (Fig. 6) z. E. den innern Winkel PDA, nie seinen Nebenwinkel PDB nehmen, wenn man Tangenten oder Cosinus braucht. Ist PDA spitzig; so ist PDB stumpf (52. S. 4. B. der Geom.) und also im ersten Falle, Tangente und Cosinus positiv, im andern aber negativ (eb. Tr. 3. Erkl. 3. Zus., und 4. Erkl. 1. B.) und in jenem also erfolgen aus den Zeichen dieser Linien andere Schlüsse als in diesem.

3. Satz.

In jedem schiefen Kugeldreyecke verhalten sich die Sinus der Winkel auch wie die Sinus der gegenüberstehenden Seiten.

So ist im Dreyecke BPD (6, 7. Fig.)

$$\sin B : \sin D = \sin DP : \sin PB$$

Denn nach 1. Satzes 1. ist, im rechtwinklichten Kugeldreyeck PAB

$$r \cdot \sin PA = \sin B \cdot \sin PB$$

und aus gleicher Ursache in dem rechtwinklichten Dreyecke PAD

$$r \cdot \sin PA = \sin D \cdot \sin PD$$

Also

$$\sin B \cdot \sin PB = \sin D \cdot \sin PD \text{ (Ar. I. 87)}$$

woraus nach Arithmetik V. 33. die Proportion folgt.

Liesse man von D auf PB einen perpendikulären Bogen, so ergiebt sich eben so

sin B : sin P = sin PD : sin BD.

4. Satz.

Die beyden Sinus der beyden Stücke eines schiefen Kugeldreyecks Grund zwischen dem Perpendikel und des Dreyecks Schenkeln, verhalten sich umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Winkel.

So ist

sin DA : sin AB = tang PBA : tang PDA

denn nach 1. Satzes II. hat man

r . tang PA = tang PBA . sin BA

und

r . tang PA = tang PDA . sin DA

Also

tang PBA . sin BA = tang PDA . sin DA

woraus die Proportion, nach Ar. V. 33. folgt.

5. Satz.

Die Cosinus der beyden Stücke im 4ten Satze verhalten sich wie die Cosinus der anliegenden Seiten.

So ist

Cos DA : Cos AB = Cos PD : Cos PB

denn aus des 1. Satzes 3. Zus. III. hat man

r : Cos PA = Cos BA : Cos BP

und

r : Cos PA = Cos DA : Cos PD

Also:

Cos DA : Cos PD = Cos BA : Cos BP

Folglich

Cos DA : Cos BA = Cos PD : Cos BP

(Ar. V. 34.)

6. Satz.

Die Sinus der beyden Winkel die an der Spitze vom Perpendikel und des Dreyecks Schenkeln eingeschlossen werden, verhalten sich wie die Cosinus der Winkel am Grunde.

So ist

sin BPA : sin APD = Cos PBA : Cos PDA

Denn nach des 1. Satzes 3. Zus. IV. ist

r : Cos PA = sin BPA : Cos PBA

r : Cos PA = sin APD : Cos PDA

Also:

sin APD : Cos PDA = sin BPA : Cos PBA

Folglich:

sin APD : sin BPA = Cos BPA : Cos PBA

7. Satz.

Die Cosinus der beyden Winkel (6. Satz) an des Dreyecks Spitze verhalten sich umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

So ist

Cos BPA : Cos DPA = tang DP : tang BP

Denn aus des 1. Satzes 3. Zus. VIII erhält man, (verm. Ar. V. 32) wenn man daselbst BPA, APD, PA,

PA, ſtatt B, BA, ſezt, die aleichen Producte im Buche, und daraus die Proportion. (a. O. 33.)

8. Satz.

Gegeben

Im Kugeldreyecke APB (4. Fig.) alle drey Seiten PB, PA, BA;

Geſucht:

Einen Winkel B dieſes Dreyecks.

Auflöſung.

8. Satz. 2.

Man fälle ꝛc.]

Aus P, des Dreyecks Spitze fälle man ſenkrecht PQ auf KA, und PN auf KB, ſo iſt für der Kugelhalbmeſſer oder KP = 1 (eb. Tr. Vor. 1. d. 19. S.)

$$PN = \sin PKN;\quad KN = \mathrm{Cos}\, PKN$$
$$PQ = \sin PKQ;\quad KQ = \mathrm{Cos}\, PKQ$$

Aber

$$\left.\begin{matrix} PKN = PB = a \\ PKQ = PA = b \end{matrix}\right\} \text{(1. Erkl. 1. Zuſ. u. 1)}$$

Alſo

$PN = $ ꝛc. (S. Buch.)

8. Satzes. 3.

. . . alſo PNM ꝛc.]

KB iſt der Ebnen PKB, AKB Durchſchnitt; PN ſo wohl als MN ſtehen auf ihm in N ſenkrecht (3, 2) ſo daß PN in der Ebne PKB und NM in der AKB liegt. Daher iſt der Winkel PNM dieſer beyden Ebnen Neigung (Geom. II. Th. 2. Erkl.)

Eben

Eben so ist PQN der Ebnen AKB, PKA Neigung;

Also ist PNM = ꝛc. (S. Buch).

Folglich ist verm. eb. Tr. 19. S. Vorer. 9. in dem rechtwinklichten Dreyeck PMN,

$$PM = PN \cdot \sin PNM$$
$$NM = PN \cdot \mathrm{Cos}\, PNM$$

Aber nach (3) ist

$$PNM = B$$

und nach (2)

$$PN = \sin a$$

Folglich

$$PM = \text{ꝛc. (S. Buch.)}$$

8. Satz. 6.

Aus der Proportion im Buche, welche aus eb. Tr. 10. S. folgt, hat man

$$\sin KNQ = \frac{KQ \cdot \sin p}{NQ}$$

und nach (2)

$$\sin KNQ = \frac{\mathrm{Cos}\, b \sin p}{NQ}$$

Da aber MNK ein rechter Winkel (3) und = QNK + QNM; so ist QNM des Winkels QNK Ergänzung zu 90°

Folglich

$$\sin KNQ = \mathrm{Cos}\, MNQ \text{ (eb. Tr. 3. Erkl.)}$$

Also auch

Cos

$$\text{Cof MNQ} = \frac{\text{Cof b sin p}}{\text{NQ}}$$

8. Satz. 7.

also aus (6) ꝛc.]

Man ſetze nämlich in

$$QM^2 = NQ^2 + NM^2 - 2 . NQ . NM \text{ Cof MNQ}$$

für Cof MNQ den in (6) ihm gleichen Werth; ſo erhält man

$$QM^2 = NQ^2 + NM^2 - 2\ NM\ .\ NQ \times \frac{\text{Cof b sin p}}{\text{NQ}}$$

$$= \text{ꝛc. (wie im Buche).}$$

8. Satz. 8.

Nach (2, 3) iſt das Dreyeck PQM bey Q rechtwinklicht, daher verm. G. 15. S.

$$QM^2 = \text{ꝛc. (S. Buch.)}$$

8. Satz. 9.

Wenn man in der erſten Gleichung hier auf beyden Seiten + 2 NM . Cof b . ſin p, addirt, ſo erhält man die andere. (Ar. I. 88.)

8. Satz. 10. 11. 12, 13, 14, 15.

Wenn man von dieſer andern Gleichung in (9), $PQ^2 - PM^2$ (nach Ar. II. 3.) auf beyden Seiten abzieht; ſo ergiebt ſich die hier in (10); nämlich:

$$2\ NM\ \text{Cof b sin p} = NQ^2 + NM^2 - PQ^2 + PM^2 = NQ^2$$

$= NQ^2 + NM^2 + PM^2 - PQ^2$

Aber in dem bey M rechtwinklichten Dreyecke (3) ist

$NM^2 + PM^2 = PN^2$ (Geom. 15. S.)

Also

$2 . NM \operatorname{Cof} b \sin p = NQ^2 + PN^2 - PQ^2$;

Nun ist nach (5)

$NQ^2 = \operatorname{Cof} a^2 + \operatorname{Cof} b^2 - 2 \operatorname{Cof} a . \operatorname{Cof} b . \operatorname{Cof} p$

und nach (2)

$+ PN^2 = + \sin a^2$

$- PQ^2 = - \sin b^2$,

Folglich, wenn man gehörig substituirt, (Ar. I, 87)

$2 NM \operatorname{Cof} b \sin p = \operatorname{Cof} a^2 + \operatorname{Cof} b^2 - 2 \operatorname{Cof} a \operatorname{Cof} b \operatorname{Cof} p + \sin a^2 - \sin b^2$

$= \operatorname{Cof} a^2 + \sin a^2 + \operatorname{Cof} b^2 - 2 \operatorname{Cof} a \operatorname{Cof} b \operatorname{Cof} p - \sin b^2$

Aber

$\sin b^2 = 1 - \operatorname{Cof} b^2$

mithin

$- \sin b^2 = - (1 - \operatorname{Cof} b^2)$

$= - 1 + \operatorname{Cof} b^2$ (Ar. I. 98.);

überdieß

$\operatorname{Cof} a^2 + \sin a^2 = 1$

Also wird nun

$2 . NM \operatorname{Cof} b \sin p = 1 + \operatorname{Cof} b^2 - 2 \operatorname{Cof} a \operatorname{Cof} b \operatorname{Cof} p - 1 + \operatorname{Cof} b^2$

$= 1 - 1 + \operatorname{Cof} b^2 + \operatorname{Cof} b^2 - 2 \operatorname{Cof} a \operatorname{Cof} b \operatorname{Cof} p$

$= 2 \operatorname{Cof} b^2 - 2 \operatorname{Cof} a \operatorname{Cof} b \operatorname{Cof} p$

$= 2 \operatorname{Cof} b . \operatorname{Cof} b - 2 \operatorname{Cof} b . \operatorname{Cof} a . \operatorname{Cof} p$

$= 2 \operatorname{Cof} b (\operatorname{Cof} b - \operatorname{Cof} a . \operatorname{Cof} p)$

Nun

Nun ist nach (4)

$$MN = \sin a \operatorname{Cos} B$$

Also

$$2\,NM = 2 \sin a \operatorname{Cos} B$$

Folglich, wird

$$2NM \cdot \operatorname{Cos} b \sin p = 2 \sin a \operatorname{Cos} B \operatorname{Cos} b \sin p$$
$$= 2 \operatorname{Cos} b \cdot \sin a \operatorname{Col} B \sin p$$

Also

$$2 \operatorname{Cos} b \cdot \sin a \operatorname{Cos} B \sin p = 2 \operatorname{Cos} b (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \cdot \operatorname{Cos} p)$$

Folglich

$$\frac{2 \operatorname{Cos} b \cdot \sin a \operatorname{Cos} B \sin p}{2 \operatorname{Cos} b} =$$

$$\frac{2 \operatorname{Cos} b (\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} p)}{2 \operatorname{Cos} b} \quad \text{(Ar. I. 88.)}$$

Mithin

$$\sin a \operatorname{Cos} B \sin p = \operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} p$$

Folglich

$$\frac{\sin a \sin p \cdot \operatorname{Cos} B}{\sin a \sin p} = \frac{\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} p}{\sin a \sin p}$$

oder

$$\operatorname{Cos} B = \frac{\operatorname{Cos} b - \operatorname{Cos} a \operatorname{Cos} p}{\sin a \sin p}$$

wie im Buche.

8. Satz. 17.

Die Formel in (15) in Worte ausgedrückt, hiesse:

Von dem Cosinus der Seite die dem gesuchten Winkel gegenübersteht, ziehe man das Product

duct der Cosinusse der Seiten die diesen Winkel einschliessen, ab;

Die so erhaltene Differenz dividire man durch das Product der Sinusse gleich genannter Seiten;

Der Quotiente giebt den Cosinus des gesuchten Winkels, für den Halbmesser = 1.

Multiplicirt man diesen mit der Tafeln Halbmesser; so hat man den Cosinus für diesen Halbmesser.

8. Satz. 18.

Der Nenner in (15) bleibt immer positiv, weil er ein Product der Sinusse ist (eb. Tr. 2. Erkl. 8. Zus.; und hier 6. Erkl.)

Daher muß es sich aus dem Zähler entscheiden, ob Cos B positiv oder negativ also B spitzig oder stumpf ist.

Wenn beyde Seiten, a, p zugleich stumpf, so sind ihrer Cosinusse beyde negativ, und — Cos a × — Cos p = Cos a Cos p (Ar. I. 108) und die Formel in (15) bleibt ungeändert. Eben so wenn a, und p zugleich spitzig sind.

Wenn hingegen das Product Cos a Cos p > Cos b, so wird Cos B verneinend.

Ist aber eine von beyden Seiten, a, größer, die andere, p, hingegen kleiner, als 90°; so ist Cos a negativ, und Cos p positiv; und das Product der Cosinusse = — Cos a × + Cos p = — Cos a Cos p: Folglich, wird in diesem Falle

$$\text{Cos B} = \frac{\text{Cos b} - (-\text{Cos a Cos p})}{\text{sin a sin p}}$$

$$= \frac{\text{Cof b} + \text{Cof a Cof p}}{\text{fin a fin p}} \text{ (Ar. I, 98)}$$

8. Satz. 19.

Aus (15) ist

$$\text{Cof B} = \frac{\text{Cof b}}{\text{fin a fin b}} - \frac{\text{Cof a Cof p}}{\text{fin a fin p}},$$

woraus verm. eb. Tr. 5. Erkl. 1. Z. die Gleichung im Buche folgt.

8. Satz. 20, 21.

Imgleichen ist (16)

$$1 - \text{Cof B} = 1 - \frac{\text{Cof b} - \text{Cof a Cof p}}{\text{fin a fin p}}$$

$$= \frac{1 . \text{fin a fin p} - (\text{Cof b} - \text{Cof a Cof p})}{\text{fin a fin p}}$$

(Ar. I. 72.)

$$= \frac{\text{fin a fin p} - \text{Cof b} + \text{Cof a Cof p}}{\text{fin a fin p}}$$

(Ar. I. 98)

$$= \frac{\text{fin a fin p} + \text{Cof a Cof p} - \text{Cof b}}{\text{fin a fin b}}$$

Aber nach 19. Satzes 1. Zuf. (nur dort a, p statt α, β gesezt) ist

$$\text{fin a fin p} + \text{Cof a Cof p} = \text{Cof (a} - \text{p)}$$

Folglich wird

$$1 - \text{Cof B} = \frac{\text{Cof (a} - \text{p)} - \text{Cof p}}{\text{fin a fin p}}$$

8. S.

8. Satz. 24.

Man setze also ꝛc.]

Um den Ausdruck in (21) auf den hier aus des 19. S. 12. Z. angeführten zu bringen, muß man

$$a - p = \alpha - \beta$$

und

$$b = \alpha + \beta$$

setzen, dann daraus den Werth von α sowohl als β, in a, p, b (als bekannten Größen) ausgedrückt, suchen.

Man sieht aber daß sich in den lezt angeführten Ausdrücken, β, addendo und α subtrahendo aufhebet;

Wenn man daher zu

$$a - p = \alpha - \beta,$$

$$b = \alpha + \beta \text{ addirt;}$$

So ergiebt sich

$$a - p + b, \text{ oder } b + a - p = 2\alpha;$$

subtrahirt man aber von

$$b = \alpha + \beta,$$

$$a - p = \alpha - \beta;$$

So bekommt man

$$b - (a - p) = 2\beta$$

Aus $2\alpha = b + a - p$ hat man,

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(b + [a - p])$$

und aus $2\beta = b - (a - p)$,

$$\beta = \tfrac{1}{2}(b - [a - p])$$

wie im Buche.

Wenn nun

$$a - p = \alpha - \beta$$

und

$$b = \alpha + \beta$$

gesezt wird; so erhält man, wenn man in Cos $(\alpha - \beta)$ — Cos $(\alpha + \beta)$ gehörig substituirt,

$$\text{Cos}\,(a - p) - \text{Cos}\,b = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

Sezt man also rechter Hand das Gleichheitszeichen, die vorhin für α, β gefundenen gleichen Werthe; so ergiebt sich

$$\text{Cos}\,(a - p) - \text{Cos}\,b = \text{ꝛc. (S. Buch)}$$

8. Satz. 26. 27.

Aus (24) und (20) hat man

$$1 - \text{Cos}\,B = \frac{2 . \sin \frac{1}{2}(b + [a - p]) \sin \frac{1}{2}(b - [a - p])}{\sin a \sin p}$$

Sezt man in eb. Tr. 19. S. 7. Z.

$$2\Phi = B$$

also

$$\Phi = \tfrac{1}{2} B$$

so findet sich

$$1 - \text{Cos}\,B = 2 \sin \tfrac{1}{2} B^2$$

Folglich

$$2 \sin \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{2 . \sin \frac{1}{2}(b + [a - p]) \sin \frac{1}{2}(b - [a - p])}{\sin a \sin p}$$

Also

$$\sin \tfrac{1}{2} B^2 = \text{ꝛc. (S. Buch).}$$

8. Satz.

8. Satz. 33.

Zieht man auf beyden Seiten der hier gefundenen Gleichung die Quadratwurzel aus; so bekommt man

$$\sin \tfrac{1}{2} B = \frac{r \cdot \sqrt{(\sin \tfrac{1}{2}[b+(a-p)] \cdot \sin \tfrac{1}{2}[b-(a-p)])}}{\sqrt{(\sin a \sin p)}}$$

Diese Formel in Worte ausgedrückt, giebt folgende Regel.

I) Man mache die Differenz der die den gesuchten Winkel einschliessenden Seiten.

II) Diese addire man das einemal zu der diesem Winkel entgegenstehenden Seite, das anderemal aber ziehe man sie davon ab.

III) Die so erhaltene Summe und Differenz nehme man halb;

IV) Nun mache man ein Product, dessen Factoren, die Sinus dieser halben Summe und Differenz sind.

V) Aus diesem Producte ziehe man die Quadratwurzel, und

VI) multiplicire sie mit der Tafeln Halbmesser.

VII) Alles dieses (I ... VI) ist einerley, welchen Winkel man auch suchet.

VIII) Was VI giebt, dividire man durch die Quadratwurzel des Products der Sinusse der Seiten die den zu findenden Winkel einschliessen.

VIIII) Dieser Quotient giebt den Sinus des halben Winkels, für den Halbmesser der Tafeln.

X) Für die Rechnung mit Logarithmen hat man $\log \sin \frac{1}{2} B = 10 + \frac{1}{2} (\log \sin \frac{1}{2} [b + (a - p)] + \log \sin \frac{1}{2} [b - (a - p)] - [\log \sin a + \log \sin p])$

Exempel.

1) Bey geometrischen Messungen müssen die Schenkel der gemessenen Winkel horizontal seyn. Sind sie aber nicht horizontal genommen worden; es sey nun aus Versehen, oder sonstigen Ursachen; so muß man sie auf eine Horizontalfläche reduciren; d. h. einen Winkel finden, den ein paar Verticalflächen, die durch die schiefen Schenkeln des gemessenen Winkels gehen, mit einander machen. Nun schneiden diese Vertikalflächen, die Horizontalfläche in ein paar Horizontallinien; und die machen den gesuchten Winkel.

2) Es sey daher (Fig. V)

HKI der gemessene Winkel dessen Schenkel schief,

aFA die Horizontalfläche,

HKF, IKa Vertikalflächen, durch des Winkels Schenkel, HK, IK

KF = Ka = KE = KI = r,

Man ziehe mit KF, Ka, = r die Bogen FHE, aIE, so ist

FHE = 90° } (Geom. 50. S. 2. 3.)
= aIe }

Also

Also der

sphärische Winkel IEH = aKF (Geom. 52. S. 4. Z.)
= dem gesuchten Winkel.

Nun ist in dem sphärischen Dreyecke EIH der Bogen IH, das Maaß des gemessenen Winkels HKI; Also gegeben; Ueberdieß, müssen auch die Bogen HE, IE bekannt seyn; Sie sind die Maasse der Winkel, die die schiefen Schenkel des gemessenen Winkels HKI mit einer durch seinem Scheitel gehende Vertikallinie machen. Ihre Größe erfährt man also durch Winkelmesser, die gehörig in die Vertikalebnen EFK, EaK, gestellt sind.

3) So sind folglich in dem sphärischen Dreyecke IEH die drey Seiten

IH = b,
HE = p
IE = a

gegeben, aus denen man den Winkel E = aKF, sucht.

Dieß kann nun entweder nach der in (15) oder (33) gegebenen Formel geschehen.

4) Es sey

b = 25°
a = 86°
p = 84°

so ist (nach (33) gerechnet)

b + a — p = 27°
b — (a — p) = 23°

Also

$$\tfrac{1}{2}(b + a - p) = 13^\circ\ 30'$$
$$\tfrac{1}{2}(b - [a - p]) = 11^\circ\ 30'$$

Folglich

$$\log \sin 13^\circ\ 30' = 9,3681853$$
$$\log \sin 11^\circ\ 30' = 9,2996553$$
$$18,6678406$$
$$\log (\sin 84^\circ \sin 86^\circ) = 19,9965557 \text{ abgez.}$$
$$0,6712855 - 1$$

(Ar. VI, 33. Ex.: 2)

$$0,3356427 - 1$$
$$10 = 10,0000000 \text{ add.}$$
$$9,3356427 =$$
$$\log \sin \tfrac{1}{2} E,$$

welcher dem log sin 12° 30′ am nächsten kommt. Bedient man sich hier der Proportionaltheile, (eb. Tr. 12. S.) so findet man

$$\tfrac{1}{2} E = 12^\circ\ 30'\ 32'' +;$$

Also

$$E = 25^\circ\ 1'\ 4'' +$$

Bedient man sich der Formel (15) und gleichfalls der Proportionaltheile, so findet man $E = 25^\circ\ 1'\ 5'' -$.

Dieses Exempel ist aus Herrn Prof. Klügels analytischen Trigonometrie.

Uebrigens lese man hiervon Herrn Hofr. Kästners astron. Abh. I. S. 35 und f. S. auch dessen Anm. zur Markscheidekunst. 12. Anm. 41 ꝛc.

9. Satz.

9. Satz. Aufg.

Diese Aufgabe läuft ganz auf die hinaus:

Aus einem Kugeldreyecke ein anderes zu machen, dessen Spitzen die Pole der drey Seiten von dem gegebenen Dreyecke sind.

Also gegeben:

Auf der Kugeloberfläche ein sphärisches Dreyeck KPD (VIII. Fig.)

Gesucht:

Auf eben der Kugel ein anderes HFG, dessen Spitzen H, F, G, die Pole der drey Seiten PD, PB, BD des gegebenen sind.

Auflösung.

1) Man verlängere die Seite BP nach A,

2) desgleichen die Seite BD nach C;

3) Nehme darauf BA sowohl als BC, = 90°;

4) Lege durch A und C einen größten Kreis; und

5) nehme AF = 90° = GC..

6) Hierauf erlängere man die dritte Seite PD des gegebenen Dreyecks nach K;

7) Mache PK = 90°

8) Lege durch K, F den größten Kreis KFH; und

9) nehme darauf KH = 90°; Endlich

10) führe man durch H, G den größten Kreis HG;

So wird das Dreyeck HFG, das Verlangte seyn.

Beweis.

Da CG = 90°; (5. Aufl.); so ist vermöge Geom. 52. S. 2. Zusatzes G des größten Kreises BD Pol.

Aus gleicher Ursache ist F, der Pol des Kreises PB, und H der Pol des Kreises DPK (9. Aufl.).

Verhalten des Dreyecks FGH Seiten gegen des Dreyecks BPD Winkel, und lezteres Seiten, gegen die Winkel des erstern.

I) Weil

$$CG = FA \text{ (5. Aufl.)}$$

oder

$$CA + AG = FG + GA$$

So ist

$$CA = FG;$$

II) Aber CA ist das Maaß des sphärischen Winkels PBD (Geom. 52. S. 4. Z.); folglich

$$FG = PBD.$$

III) Da F des Kreises PB Pol (5. Aufl.); So ist FI = 90° (Geom. 52. S. 2. Z.); also = KH (9. Aufl.); Folglich

$$HF = KI,$$

(welches auf ähnliche Art, wie in II, erhellet).

IV)

IV) Nun ist KI das Maas des sphärischen Winkels KPI (Geom. 52. S. 2. Z.); dieser aber = BPD (Geom. 52. S. 4. Z.); folglich

FH = BPD.

V) Der Kreis HG (10. Aufl.) muß die Kreise PD, BD schneiden.

Bey jenen geschehe es in M, bey diesen in L;

So ist

$$\left.\begin{matrix} GL = 90° \\ = HG \end{matrix}\right\} \text{(Geom. 52. S. 2. Z.)}$$

und also

HG = ML

VI) Aber ML ist das Maaß des Winkels PDC, des PDB Nebenwinkels.

Folglich ist

HG = PDC

= 180° — PDB.

VII) CL ist das Maaß des Winkels CGL, oder HGF.

VIII) Da nun der Kreis HG durch die Pole der Kreise PD, BD, gehet (10. der Aufl.); so steht er auf sie senkrecht (Geom. 50. S. 1. Z.); und folglich ist D dieses Kreises HG Pol (G. a. S. 2. Z.).

Also sind DL, DM, Quadranten. (Geom. 52. S. 2. Z.)

IX) Folglich ist

BC = DL, (3. Aufl.)

Mithin

Mithin

$$BD = CL,$$

also:

$$BD = HGF \text{ (VII)}$$

X) Da P des Kreises HK Pol (7. Aufl. und Geom. 52. S. 2. Z.); so ist $PI = 90°$;

Also

$$BA = PI \text{ (3. Aufl.)}$$

Folglich

$$BP = AI.$$

XI) Aber AI ist des Winkels AFK Maaß, und $AFK = 2\,R - AFG$;

Folglich

$$BP = 2\,R - AFG \text{ (X)}.$$

XII) Das Maaß von dem Winkel GHK, ist MK, und

$$DM = PK \text{ (VIII; 7. Aufl.)}$$

Also

$$DP = MK$$

Folglich

$$DP = GHK.$$

XIII) Bezeichnet man nun, jeden innern Winkel beyder Dreyecke mit dem an seiner Spitze stehenden Buchstaben, und jede Seite mit dem ähnlich kleinen Buchstaben des innern Winkels, dem sie gegenübersteht;

So ist

XIV) Für des Dreyecks HFG Winkel,

$$G = p$$

$G = p$ (IX)
$F = 180° - d$ (X)
$H = b$ (XII)

XV) Für dieses Dreyecks HFG Seiten
$g = P$ (IV)
$f = 180° - D$ (VI)
$h = B.$ (II)

XVI) Also
$\sin G = \sin p$; $\sin F = \sin d$; $\sin H = \sin b$;
$\sin g = \sin P$; $\sin f = \sin D$; $\sin h = \sin B.$

XVII) Aber
$\mathrm{Cos}\, G = \mathrm{Cos}\, p$; $\mathrm{Cos}\, F = -\mathrm{Cos}\, d$; $\mathrm{Cos}\, H = \mathrm{Cos}\, b$;
$\mathrm{Cos}\, g = \mathrm{Cos}\, P$; $\mathrm{Cos}\, f = -\mathrm{Cos}\, D$; $\mathrm{Cos}\, h = \mathrm{Cos}\, B.$

XVII^b) Das bisherige ist nach dem Verfahren unsers Herrn Autors an dem im Buche angeführten Orte, nur mit einiger Aenderung, vorgetragen.

Ich habe es der Umständlichkeit wegen, erwählt. Und wer dieß versteht, versteht auch was im Buche gesagt ist.

XVIII) Hieraus nun und vermittelst des 8. Satzes, läßt sich leicht folgende Aufgabe lösen.

Aus eines Kugeldreyecks PDB Winkel, P, D, B, eine von seinen Seiten, b, zu finden.

XIX) Aus den Vorgehenden sieht man, daß dieß nichts anders heißt, als:

Aus eines Dreyecks HFG, (das der vor. Aufg. gemäß) Seiten, g, f, h, den Winkel H zu finden.

XX)

XX) Nach 8. S. 33. ist

$$\sin\tfrac{1}{2}H = \sqrt{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(h+g-f)\sin\frac{1}{2}(h-g+f)}{\sin g \sin f}\right)}$$

XXI) Aber nach XV, ist

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(h+g-f) &= \tfrac{1}{2}(B+P-[180^\circ - D]) \\ &= \tfrac{1}{2}(B+P-180^\circ+D) \\ &= \tfrac{1}{2}(B+P+D) - \tfrac{1}{2}180^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}(B+P+D) - 90^\circ \\ &= -[90^\circ - (\tfrac{1}{2}(B+P+D))]\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(h+g-f) &= -\sin[90^\circ - (\tfrac{1}{2}(B+P+D))] \\ &= -\operatorname{Col}\tfrac{1}{2}(B+P+D)\end{aligned}$$

[eb. Tr. 3. Erkl. 4. Z.]

XXII) Da nun

$$B+P+D > 180^\circ;$$

So ist folglich

$$\operatorname{Col}\tfrac{1}{2}(B+D+P) \text{ verneint;}$$

mithin

$$-\operatorname{Col}\tfrac{1}{2}(B+D+P) \text{ bejaht;}$$

oder

$$= +\operatorname{Col}\tfrac{1}{2}(B+D+P)$$

XXIII) Ferner ist

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(h-g+f) &= \tfrac{1}{2}(B-P+180^\circ-D) \\ &= \tfrac{1}{2}(B-P-D+180^\circ) \\ &= \tfrac{1}{2}(B-P-D)+90^\circ \\ &= -\tfrac{1}{2}(P+D-B)+90^\circ \\ &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(P+D-B)\end{aligned}$$

XXIV) Also:

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}(h-g+f) &= \sin[90^\circ - \tfrac{1}{2}(P+D-B)] \\ &= \operatorname{Col}\tfrac{1}{2}(P+D-B)\end{aligned}$$

XXV)

XXV) Ueberdieß

$$\left.\begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} H = \sin \frac{1}{2} b \\ \sin g = \sin P \\ \sin f = \sin D \end{array}\right\} \text{(XVI)}$$

XXVI) Folglich verwandelt sich die Gleichung bey XIX in die

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{Col}\frac{1}{2}(B+D+P)\operatorname{Col}\frac{1}{2}(P+D-B)}{\sin P \sin D} r^2\right)}$$

welche der Aufgabe (XVIII) Gnüge thut.

XXVII) Nach 8. S. 15. findet sich

$$\operatorname{Col} H = \frac{\operatorname{Col} h - \operatorname{Col} g \operatorname{Col} f}{\sin g \sin f}$$

für $r = 1$.

XXVIII) Nun ist

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Col} H = \operatorname{Col} b \\ \operatorname{Col} h = \operatorname{Col} B \\ \operatorname{Col} g = \operatorname{Col} P \\ \operatorname{Col} f = -\operatorname{Col} D \\ \sin g = \sin P \\ \sin f = \sin D \end{array}\right\} \text{(XVII)}$$

XXIX) Folglich wird aus XXVII.

$$\operatorname{Col} b = \frac{\operatorname{Col} B + \operatorname{Col} P \operatorname{Col} D}{\operatorname{Col} P \sin D}$$

XXX) Mehreres hievon findet sich in unsers Herrn Autors astronom. Abhand. I. Samml. II. Abh. 81. S.

XXXI)

XXXI) Einige Erläuterungen des im Buche: **Vermöge** 8. S. ließe ꝛc.

Im Dreyecke HFG, läßt sich, nach 8. Satzes 15, für jeden Winkel desselben, ein Ausdruck durch seine Seiten finden.

Für H ist es schon im XXVII geschehen; und für G, F, erhält man auf gleiche Art wie im XXVII, folgende Gleichungen.

$$\text{Cos}\, G = \frac{\text{Cos}\, g - \text{Cos}\, h\, \text{Cos}\, f}{\sin h \sin f}$$

$$\text{Cos}\, F = \frac{\text{Cos}\, f - \text{Cos}\, g\, \text{Cos}\, h}{\sin g \sin h}$$

Welche Ausdrücke den im Buche völlig ähnlich sind; nur muß man daselbst unter den griechischen Buchstaben, die Cosinus und unter den lateinischen die Sinus, verstehen.

Jede dieser Gleichungen giebt auf ähnliche Art wie im XVIII, XIX eine Gleichung für einen Winkel des Dreyecks PDB.

Das übrige dieses Satzes im Buche gehört in die Algebra.

10. Satz.

Aus den bisherigen Sätzen (2 . . . . 9. S.) lassen sich die Auflösungen aller Fälle, die bey schiefwinklichten sphärischen Dreyecken vorkommen können, herleiten.

Die

Die diesem Satze beygefügte Tafel enthält sie alle. Will man selbige brauchen, so darf man sich an jedes schiefe Kugeldreyeck das vorkommt, nur die Buchstaben der bisher betrachteten (Fig. 6; 7) schreiben, und man findet in derselben allemal die Proportion, die jeden vorkommenden Fall auflöset.

Wollte man nach dieser Tafel, z. E. die Frage:

Aus zwo Seiten BP, BD, und dem eingeschlossenen Winkel B (Fig. 6, 7) die

übrige Seite DP zu finden,

beantworten; So sucht man in der Columne: Gegeben, die Data auf, und in der Columne: Gesucht, das zu findende DP;

Man wird dieß in der Tafel beym 9. Fall antreffen. Daselbst stehen zwo Proportionen; die zweyte ergiebt sich aus dem 5. Satze und ist

$$\text{Cos BA} : \text{Cos BP} = \text{Cos DA} : \text{Cos DP}$$

In ihr ist das erste und dritte Glied, (die die beyden Stücken des Grundes sind) unbekannt. Da aber der Grund BD gegeben, so darf nur ein Stück BA bekannt seyn, da sich so gleich das andere, $DA = BD - BA$, oder $= BA - BD$, (nachdem das Perpendikel ausserhalb oder innerhalb des Dreyecks fällt) findet.

Zu dieser Absicht nun ist a. a. O. die erste Proportion, die in der Tafel (1. S. 4. Z.) für die

rechtwinklichten Dreyecke beym 4. Falle stehet. Sie heißt

r : Cos B = tang BP : tang BA,

wo die ersten drey Glieder bekannt, und folglich auch dadurch das vierte, tang BA, mithin auf die Art BA, gegeben.

So hat man also Cos BA, folglich auch Cos DA = Cos (BD — BA), und da PB gegeben; so ist gleichfalls Cos BP bekannt; mithin die drey ersten Glieder, der erst angeführten Proportion, durch die sich nun DP finden läßt.

In ähnlichen Fällen verhält man sich auf ähnliche Art.

Bey wirklicher Berechnung dieses und aller Fälle der diesem 10. Satze beygefügten Tafel braucht man gleichfalls mit Vortheil die Logarithmen.

Exempel.

Es sey

BD = 40°
BP = 60°
B = 50°

so ist, um erstlich BA zu finden,

log Cos B = 9, 8080675 } add.
log tang P = 10, 2385606 }

20, 0466281
log r = 10, 0000000 abgez.

log tang BA = 10, 0466281;

welcher

welcher Logarithme, dem Logarithmen der Tangente für

$$BA = 48^\circ\ 4'$$

am nächsten kommt.

Also hat man

$$DA = 48^\circ\ 4' - 40^\circ$$
$$= 8^\circ\ 4'$$

Nun findet sich DP, wie folget:

$$\left.\begin{array}{l}\log \text{Cof } BP = 9,6989700\\ \log \text{Cof } DA = 9,9956815\end{array}\right\} \text{add.}$$
$$19,6946515$$
$$\log \text{Cof } BA = 9,8249490, \text{ abgez.}$$

Also $\log \text{Cof } DP = 9,8697025,$

giebt

$$DP = 42^\circ\ 12' -$$

Ausser den in der Tafel dieses 10. Satzes gegebenen gewöhnlichen Vorschriften, für die Auflösungen schiefer Kugeldreyecke, lassen sich auch welche durch analytische Formeln, und ohne Perpendikel zu ziehen, geben. Solche Formeln sind bequemer, besonders in den Fällen, (3 . . . . 10, der Tr.) wo das Perpendikel (PA) in Betrachtung kommt. In diesen Fällen gelangt man nach den gewöhnlichen Vorschriften, zu dem Gesuchten allemal durch zwo Porportionen, dahingegen gedachte Formeln, dasselbe auf einmal darstellen; überdieß erspahren sie auch die oft mühsame Aufmerksamkeit auf die Lage des Perpendikels.

Man findet dergleichen Formeln in unsers Hn. Aut. schon mehrmaln angeführten astronomischen Abhandlungen, I. Samml. II. Abh.; überdieß, in Herrn Hofr. Karstens Lehrbegrif ꝛc. 2. Th. 439 u. f. S.; und Herrn Prof. Klügels analytischen Trig. 165 ꝛc. S.

10. Satz. 1. Anmerkung. 458. Seite.

Die Zweydeutigkeiten die hier ꝛc.]

Nämlich die Zweydeutigkeiten die bey den Auflösungen der Fälle in der Tafel vorkommen können. — Daß dieß geschehen kann, ist aus dem 2. Satze bekannt.

1. Fall.

In diesem Falle wird aus zwo gegebenen Seiten PB, PD, und einem Winkel B, welcher PD entgegensteht, der PB gegenüberliegende Winkel D gesucht.

Stellt man sich unter B, PB, PD, D das W, l, L, w im 2. Satze 16, vor; so kann man darnach aus den Beschaffenheiten von B, PB, PD, leicht entscheiden, ob D stumpf oder spitzig sey.

Sind z. B. B und PB spitzig und PD $<$ PB; so ist D zweydeutig, ist aber PD $>$ PB; so ist D spitzig; u. s. w.

2. Fall.

Hier verfährt man (nach 2. S. 2.) auf ähnliche Art, wie vorhin im 1. Falle.

Z. B. Sind von den gegebenen Dingen B, BP, D die ersten zwey, spitzig, und das dritte D $>$ B;

so

so ist die an D anliegende gesuchte Seite PD zweydeutig; ist hingegen D < B; so ist PD spitzig; u. s. w.

3. Fall.

Hier soll aus zwo Seiten PB, PD, und einem Winkel B, der der einen gegebenen Seite gegenübersteht, die dritte Seite BD gesucht werden.

Nach den in der Tafel stehenden Proportionen, wird sie durch die Stücke BA. AD, (6. 7 Fig.) die zwischen dem Perpendikel und den gegebenen Seiten liegen, gefunden.

Es ist aber BD entweder = BA + AD (6. Fig.) oder (7. Fig.) = BA — DA (welches man kurz so ausdrückt, BD = BA $\pm$ DA) das erste findet statt, wenn das Perpendikel PA innerhalb des Dreyecks PBD, das andere aber, wenn PA ausserhalb, desselben fällt.

Man muß also hier entscheiden können, ob das Perpendikel innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks zu liegen komme.

Dieß geschiehet nach des 2. S. 2, wo man wissen muß, ob D mit B von einer Art sey oder nicht.

Ist jenes, so fällt PA innerhalb, ist aber dieses, so fällt es ausserhalb des Dreyecks.

Wie nun der Winkel D, gegen B beschaffen ist, erkennt man ohne ihn genau zu berechnen, aus 2. S. 16. weil die gegebenen Dinge hier, wie im 1. Falle sind.

Würden also z. B. B, und PB stumpf und PD < PB; so ist D stumpf, und mit B von einer Art: daher PA innerhalb dem Dreyecke liegt. Wäre hingegen PD > PB; so wäre D zweydeutig; also kann D mit B so wohl gleichartig als ungleichartig seyn; folglich wäre es zweydeutig, ob PA in dem Dreyecke, oder ausser demselben, läge.

4. Fall.

Aus eben den gegebenen Dingen wie im vorigen Fall, soll man den Winkel P, den die Seiten PB, PD einschliessen, finden.

Nach den Vorschriften der Tafel für diesen Fall, sucht man erstlich den Winkel BPA, denn den Winkel APD.

Aus diesen nun findet sich $BPD = BPA \pm APD$ nachdem das Perpendikel PA innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks fällt.

Die Frage ist hier also, wie die Lage des Perpendikels sey? Die Antwort hierauf ist eben so wie im vorigen Falle; weil dorten aus eben den gegebenen Dingen, eben das zu entscheiden war.

5. Fall.

Die gegebenen Dinge sind hier wie im 2. Fall, nur wird aus ihnen P gesucht.

Nach den Vorschriften der Tafel sucht man erstlich BPA den APD; man muß also gleichfalls aus den gegebenen Dingen des Perpendikels Lage entscheiden können.

Dieß geschiehet mittelst der gegebenen Winkel B, D nach des 2. S. 2.

Ferner:

Ferner: die erste Proportion beym fünften Fall, bestimmt den Winkel BPA ohne Zweydeutigkeit; denn Cot BPA $= \frac{\text{Cos BP} \cdot \text{tang B}}{r}$, woraus man allezeit sieht, ob BPA stumpf oder spitzig ist. (1. S. 5. Z.)

Aber bey der zweyten Proportion a. a. O. findet eine Zweydeutigkeit des Winkels DPA statt.

Diese zu entscheiden, muß man wissen, ob AD, als das diesem Winkel gegenüberstehende Perpendikel im rechtwinklichten Dreyecke APD, stumpf oder spitzig? weil nach 1. S. 6. Z. AD mit DPA allemal von einer Art ist. Wie nun AD beschaffen sey, lehrt des 2. S. 22. Absatz.

Z. B. seyen B, D, und BP stumpf, so fällt, wegen der Gleichartigkeit der Winkel B, D, das Perpendikel innerhalb des Dreyecks, BPD. Ueberdieß sey B < D: so ist nach 2. S. 21. die Seite PD stumpf, und folglich, (nach 2. S. 22.) AD spitzig: Also auch der Winkel DPA < 90°.

Wäre D < B; so wäre PD zweydeutig: also auch AD (2. S. 22); folglich ebenfalls der Winkel DPA. (1. S. 6. Z.)

6. Fall.

Aus eben den gegebenen Dingen wie im vorigen Fall, sucht man hier BD.

Dieß geschiehet, indem man erstlich BA, dann DA, und hierauf $BD = BA \pm AD$, findet, nachdem nämlich das Perpendikel in das Dreyeck oder ausser demselben fällt.

Man muß also hier gleichfalls erstlich des Perpendikels Lage zu entscheiden wissen, welches nach 2. S. 2. bewerkstelliget wird; Dann frägt sichs: wie BA und AD beschaffen?

Die erste Proportion beym 6. Falle bestimmt BA ohne Zweydeutigkeit; bey der zweyten hingegen muß man die Art von AD nach 2. S. 22. entscheiden.

Das Beyspiel des vorigen Falls dient auch hier.

7. Fall.

Hier sucht man aus einer Seite BP, und den ihr anliegenden Winkeln P, B, den dritten D.

Nach der Tafel findet man aus der Proportion

$$r : \text{Cof } PB = \text{tang } B : \text{Cot } BPA$$

erstlich den Winkel BPA, den sie ohne Zweydeutigkeit bestimmt; Hierauf aus der Proportion

$$\text{sin } BPA : \text{sin } DPA = \text{Cof } B : \text{Cof } PDA$$

den Winkel D, wo DPA durch BPD $\pm$ BPA, gegeben, nachdem das Perpendikel innerhalb oder ausserhalb des Dreyecks liegt.

Ersteres geschiehet, wenn BPD $<$ BPA (7. Fig.) das andere aber, wenn BPD $>$ BPA (Fig. 6).

Uebrigens wird D ohne Zweydeutigkeit bestimmt.

8. Fall.

Um aus eben den gegebenen Dingen des vorigen Falls, die dem Winkel B gegenüberstehende Seite zu finden; muß man nach den Vorschriften der Tafel für diesen Fall, den Winkel BPA finden;

um

um daraus mittelst des gegebenen BPD, den Winkel APD zu erhalten.

Dieß geschiehet wie im vorigen Falle.

11. Fall.

Ob der gesuchte Winkel B, spitzig oder stumpf ist, entscheidet sich allemal aus der Formel des 8. S. 15; Braucht man die in (33) Satzes gefundene Formel; so findet man dadurch die Hälfte des gesuchten Winkels B, wobey man sich aus 1. Erkl. 6. Zus. erinnern muß, daß, die ihm gegenüberstehende Seite, allezeit $< 180°$ ist; folglich auch der gesuchte Winkel, und daher seine Hälfte $< 90°$; Also muß man allemal den spitzigen Winkel nehmen, der dem $\sin \frac{1}{2} B$ zugehört.

Eben so muß man beym 12. Fall für die Hälfte der gesuchten Seite b, einen Bogen $< 90°$ nehmen, der dem $\sin \frac{1}{2} b$ zukommt, wenn man zur Berechnung die Formel in (XXVI) des 9. S. Erl. braucht.

10. Satz. 2. Anmerkung. 459. Seite.

Der Baron . . . . . erstrecket.]

1) Ehe wir etwas von den hier angeführten Regeln des Baron Nepers und Freyherrn von Wolfs sagen können, müßen wir folgende Erklärungen voraus schicken.

1) Wenn in einem rechtwinklichten Kugeldreyecke (PAB, Fig. 1.) zween Theile, (PB, PA), den rechten Winkel nicht in Betrachtung gezogen, (welches

ches auch bey den folgenden Erklärungen zu merken ist) als die äussern ansieht, so heißt der dazwischen liegende Theil (P,) der **mittlere** (pars media);

2) Die äussern Theile selbst, in so ferne sie unmittelbar an dem angenommenen mittleren anliegen, werden die **anliegenden** (circumpositae, *) coniunctae **) genennt.

So sind PB, PA (1) die anliegenden Theile von dem Winkel P.

3) Wenn man im rechtwinklichten Kugeldreyecke einen Theil (PA) für den mittlern annimmt, so sind dadurch die anliegenden (P. BA) bestimmt, und die übrigen beyden Theile (B, PB) die an die anliegenden gränzen, heissen die **entgegengesezten** (oppositae *) oder **abgesonderten** (seiunctae **).

II) Die Neperische Regel ***) nun, heißt:

Der Sinus totus multiplicirt in den Sinus des mittlern Theils, ist gleich, dem Producte, der Cosinusse der entgegengesezten Theile sowohl, als der Tangenten der anliegenden Theile.

III) Das Product der Cosinusse, ist in den Fällen brauchbar die nur durch Sinusse aufgelößt werden

*) Nach Nepern.
**) Nach Wolf.
*) Nach Nepern.
**) Nach Wolf.
***) Wolf. Elem. Trig. Sh. §. 103, 111.

den können, so wie das leztere Product (der Tangenten) in den Fällen, die eine Auflösung durch die Tangenten erfodern.

IV) Auser der im Buche angeführten Schrift über diese Regel, lese man auch Herrn Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathem. I. Theil, III. Abh.

V) Die Wolfische Regel ist folgende:

Das Product des Sinus totus in den Cosinus des mittlern Theils gleicher dem Producte, der Sinusse der abgesonderten Theile sowohl, als der Cotangenten der anliegenden Theile.

VI) Die Erinnerung in (III) dient auch hier.

VII) Diese Regel sezt voraus, daß man bey ihren Gebrauch, für die gegebenen Schenkeln derselben Ergänzungen zu 90° nimmt, so wie bey der Neperischen die Complemente der Hypothenuse und schiefen Winkel zum R.

VIII) Exempel nach der Wolfischen Regel.

Aus der Hypothenuse PB, und den einen schiefen Winkel, B, die ihm gegenüberstehende Seite PA zu finden.

Man nehme AP für den mittlern Theil, (I) so sind B, und BP die abgesonderten; (3) und so hat man

r. Cos (90° — AP) = sin B . sin BP (V, VII)

Also

Also

$$r \cdot \sin AP = \sin B \cdot \sin BP$$

folglich

$$r : \sin BP = \sin B : \sin AP$$

des 1. Satzes I, oder der Auflösung des 5. Falles der Tafel des 1. S. 4. Z. gemäß.

IX) Nach der Neperischen Regel hat man

$$r \cdot \sin AP = \mathrm{Cos}(90° - B)\,\mathrm{Cos}(90° - BP)$$

[II, VII]

Also

$$r \cdot \sin AP = \sin B \cdot \sin BP.$$

wie vorhin.

X) Das bisherige wird genug seyn einen Begrif von der Neperischen und Wolfischen Regel beyzubringen.

Wie Wolf aber seine Regel auf schiefwinklichte Kugeldreyecke erstrecket, werden Anfänger in seinen Elem. Trig. Sphaer. §. 137. nachlesen.

Anhang.

Anhang.

Anwendung

der

Geometrie und beyder Trigonometrien

auf die

Markscheidekunst.

I.

Grundbegriffe der Markscheidekunst.

§. 1.

Anmerkung.

Bey den Anstalten des Bergbaues (opus metallarioruin) kommen verschiedene Puncte, also auch Linien und Ebnen, vor, deren Lage und Entfernung gegen einander man wissen muß.

Dieß kann man bey einigen durch unmittelbare Ausmessungen erlangen; bey andern hingegen müssen Größen zu Hülfe genommen werden, mittelst deren Ausmessungen man durch Schlüsse das Gesuchte finden kann.

§. 2.

Erklärung.

Alle diese Ausmessungen und Vergleichungen nun, und die daraus zum Behuf der Veranstaltungen bey dem Bergbau hergeleiteten Angaben, sind der eigentliche Gegenstand der **Markscheidekunst** (Geometria subterranea).

§. 3.

Zusatz.

In derselben muß also gezeigt werden, wie man die theoretischen Lehren der Geometrie und Trigonometrien

nometrien anwenden könne, die zum Behuf des Bergbaues vorkommenden Abmessungen auf das leichteste und vortheilhafteste zu bestimmen und mit einander zu vergleichen.

§. 4.
Erklärung.

Dabey erfodert oft die Nothwendigkeit die Lage der abgemessenen Puncte auf dem Papiere darzustellen, d. i. von ihnen eine **geometrische Verzeichnung** zu fertigen.

Eine solche Verzeichnung nun, besonders wenn sie das Bild eines Grubengebäudes (fodina) darstellet, heißt ein **Markscheiderriß.**

§. 5.
Erklärungen.

In der Markscheidersprache heißt:

Eine Verticallinie, eine **seigere Linie** (linea perpendicularis);

Eine Verticalebne, eine **seigere Ebne** (planum perpendiculare);

Eine Horizontalfläche, eine **söhlige Ebne**;

Und jede Linie in dieser, eine **söhlige Linie**, (linea horizontalis);

§. 6.
Zusatz.

Jede Ebne also die eine söhlige unter rechte Winkel schneidet ist seiger, und umgekehrt.

Auch

Auch jede Linie die mit einer söhligen Ebne oder söhligen Linie rechte Winkel machet, ist seiger, und umgekehrt.

§. 7.

Erklärung.

Abzumessende Puncte, seyen (Fig. I.) A, B, C, D, E ꝛc. und einer nach Gefallen über dem andern erhöhet.

Man denke sich eine Horizontalebne, welche die Ebne des Papieres, worauf sich die Figur befindet, vorstellen mag;

Fälle auf diese von den Puncten A, B, C, D, E, ꝛc. die Perpendikel Aa, Bb, Cc, Dd, Ee ꝛc.;

So heissen die Puncte a, b, c, d, e, ꝛc. wo diese Lothe auf der Horizontalfläche eintreffen, der Puncte A, B, C, D, E, ꝛc. **Projectionen auf die söhlige Ebne**, oder auch, die **auf den Horizont, oder eine söhlige Ebne, reducirten Puncte** A, B, C, D, E, ꝛc. und die Linien ab, u. s. w. der Linien AB u. s. f. **Projectionen auf eine söhlige Ebne**; oder auch die **auf den Horizont, oder eine söhlige Ebne, reducirten Linien** AB, u. s. w.

§. 8.

Erklärung.

Eine Figur auf dem Papiere, die der auf den Horizont reducirten, abcde, ähnlich ist, heißt der Figur ABCDE **Grundriß**, auch **söhliger Riß** (ichnographia).

Wären z. B. A, B, C, D, E, Puncte eines Stollns (cuniculum); so würde abcde dieses Stollns Grundriß seyn.

§. 8b.

Zusatz.

Man verzeichnet also eine Linie im Grundriß, wenn man ihre Projection auf eine söhlige Ebene bestimmt.

Eben so einen Punct.

§. 9.

Zusatz.

Durch einen Grundriß kann man also nur die söhligen Abstände, nicht die verschiedenen Erhöhungen der abgemessenen Puncte angeben.

Will man aber lezteres; so muß man diese Figur auf eine seigere Ebne (5) reduciren, indem man von ihnen auf sie Perpendikel fällt.

§. 10.

Erklärung.

Eine Figur auf dem Pappiere, die der auf der seigern Ebne reducirten ähnlich ist, heißt ein Profil oder Seigerriß (orthographia).

Dieser stellt also diejenige Figur vor, welche man erhielte, wenn man z E. ein Grubengebäude (fodina) mit einer seigern Ebne durchschnitte.

§. 10b.

Zusatz.

Wenn man also einer Linie Projection auf

eine

eine seigere Ebne bestimmt, so verzeichnet man sie in Seigerriß.

Eben so einen Punct.

§. 11.

Anmerkung.

Aus den bisherigen erhellet, daß, wenn man eine Linie, AB, im Grund- und Seigerriß verzeichnen will, man ihre Lage, oder, welches einerley, die Lage ihres **Endpuncts**, B, gegen ihren **Anfangspunct**, A, (d. i. den Endpunct der Linie, AB, von dem weg der **Markscheider** dieser Linie Richtung rechnet,) wissen muß, überdieß auch ihre **wahre Länge** oder den **wahren Abstand**, des Puncts B von A.

§. 12.

Lehnsatz. Grundsatz der Markscheidekunst.

Wenn die Entfernungen (Geom. 46. S. 5. Zus. u. d. Erläut.) BC, BG, BF (II. Fig.) eines Puncts B von dreyen durch einen gegebenen Punct A laufenden und ihrer Lage nach bekannten Ebnen, AH, IL, IK, gegeben sind; so weiß man B und also auch AB.

§. 13.

Zusatz.

Es sey A der schiefen Linie AB Anfangspunct, AH eine durch ihn gehende söhlige Ebne:

So zeigt des Endpuncts B Entfernung BC von dieser Ebne (Geom. a. O.), wie viel B höher als A, oder A tiefer als B, liege (12).

§. 13b.

Erklärung.

Dieses Perpendikel BC heißt des Puncts B oder der Linie AB, Seigerteufe.

§. 14.

Zusatz.

Zieht man den Punct, C, als die Projection des Endpuncts B, auf die durch A gehende söhlige Ebne, (7), und den Anfangspunct A, durch eine gerade Linie AC zusammen;

So giebt AC den horizontalen Abstand des Puncts B, von A (12).

§. 14b.

Erklärung.

Diesen nennt man die Sohle (basis) des Puncts B oder der Linie AB.

§. 15.

Erklärung.

Der Winkel den eine Linie AB mit einer söhligen Ebne AH macht, heisse dieser Linie **Neigung** oder **Neigungswinkel** (inclinatio)

In der Markscheidersprache wird er ihr **Fallen** oder ihre **Donlege** genannt.

§. 16.

Zusatz.

Wenn also im rechtwinklichten Dreyecke BCA, der Winkel BAC der Linie AB Neigung;

So

So ist der diesem Winkel gegenüberliegende Cathete BC die Seigerteufe, der ihm anliegende hingegen, AC, die Sohle von B oder AB, und die Hypothenuse AB, des Puncts B von A **wahrer Abstand**, oder kurz: **des Endpuncts B wahrer Abstand**; auch die **Fläche**.

§. 17.

Zusatz.

Weiß man folglich ausser der Größe der Linie AB, ihre Neigung;

So läßt sich deren Seigerteufe und Sohle finden (16, u. eb. Tr. 5. S.).

§. 18.

Zusatz.

Durch AB gehe eine seigere Ebne ABC; auch sey die durch den Anfangspunct A laufende Ebne IL vertical und ihre sonstige Lage bekannt:

So werden beyde, folglich auch ihr Durchschnitt, auf der durch A gehenden söhligen Ebne, senkrecht stehen (6) und selbige in AL und AC schneiden.

Also wird der Winkel CAL = dem seyn, den beyde Ebnen IL und ABC mit einander machen. (Geom. II. Th. 2. Erkl.)

§. 19.

Erklärung.

Dieser Winkel heiße das **Streichen** (directio) **der Linie AB, oder seigern Ebne ABC.**

§. 20.
Zusatz.

I. Jede in einer und derselben seigern Ebne liegende Linie hat mit ihr einerley Streichen (18).

II. Umgekehrt: die durch eine und derselben Linie, AB, gehende seigere Ebne hat mit AB einerley Streichen.

III. Also hat einer Linie AB Projection auf eine söhlige Ebne, mit AB einerley Streichen (7).

§. 21.
Lehrsatz.

Weiß man der schiefen Linie AB Streichen und ihre Sohle, AC;

So kann dadurch dieser oder ihres Endpuncts B, Projection auf eine söhlige Ebne angegeben werden.

Beweis.

Denn A′H′ sey eine söhlige Ebne. Man fälle auf sie von A und B, die Lothe AA′, BC′: So ist A′ des Puncts A, C′ des Puncts B, und A′C′ der Linie AB Projection auf A′H′ (7); Aber AA′ ist mit CC′, AC mit A′C′ und AL mit Al parallel (G. 46. S. I; das. II. Th. 1. Erkl. und 11. S.): Also AC = A′C′ (Geom. 12. S. 3. Z.) und C′A′l = CAL (Geom. 46. S. 2. Z.) = der AB Streichen (18).

§. 22.
Lehrsatz.

Die durch den Anfangspunct A gehende Ebne IK sey seiger, und schneide die durch eben diesen

Punct

Punct laufende Verticalfläche IL nach der man der Linie AB Streichen bestimmt (18) unter rechte Winkel:

Nun seyen des Endpuncts B (21) Entfernungen, BG, von der Ebne IL, und BF von der Ebne IK bekannt (12).

So kann man dadurch ebenfalls der Linie AB oder ihres Endpuncts B Projection auf einer söhligen Ebne AA′ angeben.

Beweis.

Denn, von A sey, wie vorhin, das Perpendikel AA′; überdieß von dem Puncte G wo BG in IL eintrift, das Loth GD; dem Puncte F, wo BF in IK einschneidet das Perpendikel FE′, auf die söhlige Ebne A′H′ gefällt:

So wird GD′ izt genannte Ebne A′H′ in D′ und FE′ in E′ treffen, und A′ des Puncts A, C′ des Puncts B und A′C′ der Linie AB Projection auf A′H′ seyn (7).

Man ziehe C′ und D′ sowohl als C′ und E′ durch eine gerade Linie zusammen;

So ist

$$\left.\begin{aligned} C'D' &= BG \\ &= A'E' \end{aligned}\right\} \text{und} \quad \left.\begin{aligned} C'E' &= BF \\ &= A'D' \end{aligned}\right\} \text{(G. 46. S. I, u. 12. S. 3. B.)}$$

§. 22b.

Zusatz.

Da CA = C′A′ (Geom. 46. S. I. 11. S. und

12. S. Z.), und der Winkel C′A′D, den A′C′ mit der Ebnen IL, A′H′ Durchschnitte A′I macht, = der AB Streichen (20. III.):

So wird zugleich auch der Linie AB Sohle und Streichen bestimmt, wenn man nach vorigen §. ihres Endpuncts B Projection auf einer söhligen Ebne angiebt.

§. 23.
Erklärung.

BG (22) heisse die **Länge** (longitudo), und BF (22) die **Breite** (latitudo) des Puncts B oder der Linie AB.

§. 24.
Zusatz.

Das Dreyeck ADC ist bey D rechtwinklicht (G. 46. S.) und der Winkel CAD der Linie AB Streichen (18); Ueberdieß ist der diesem Winkel gegenüberstehende Cathete CD, = BG, der Länge der Linie AB; der an ihm liegende Cathete AD, =EC =BF, der Breite von AB, und die Hypothenuse AC die Sohle von AB. (23, 14)

§. 25.
Zusatz.

Wenn man also einer Linie Streichen und Sohle weiß; so kann man daraus ihres Endpunctes Länge und Breite finden (24, und eb. Tr. 5. S.)

§. 26.
Zusatz.

Jede Linie AB deren Sohle und Streichen, oder

statt

statt diesen Dingen, ihres Endpuncts Länge und Breite bekannt ist, kann dadurch im Grundriß verzeichnet werden (21, 22, 8); im Seigerriß aber, wenn man ihre Seigerteufe weiß (13, 9, 10).

§. 27.

Lehrsatz.

Weiß man eines Punctes B wahren Abstand von seinem Anfangspuncte A; der durch A und B gehenden geraden Linie AB Streichen und Neigung:

So kann man die Lage des Puncts B angeben.

Beweis.

Denn eben diese Dinge werden, (wie aus dem bisherigen erhellet) erfodert, die Entfernungen des Punctes B von den dreyen durch A gehenden ihrer Lage nach bekannten Ebnen zu bestimmen.

§. 28.

Zusatz.

Der Markscheider muß die Lage aller Puncte suchen (1), die ihm zu den von ihm verlangten Angaben nöthig sind.

Daher sind: wahrer Abstand, Neigungswinkel, und Streichen, eigentlich die Data, aus den der Markscheider die von ihm gefoderten Angaben, theils durch Rechnung, theils durch geometrische Verzeichnung, herleiten kann (21).

§. 29.

Anmerkung.

Diese Data zu finden, bedient man sich in der

Markscheidekunst vorzüglich der Schnure und Kette, des Gradbogens und Compasses, Werkzeuge — besonders leztere — die von den gewöhnlichen der Feldmesser abgehen, da dem Markscheider bey den unterirdischen Messungen, die Natur seines Gegenstandes den Gebrauch der geodätischen Werkzeuge entweder gar nicht zulässet, oder wenigstens doch sehr erschweret. Bey Messungen über Tage, d. h. auf der Erdfläche, können ihm ebenfalls lezt genannte Werkzeuge gute Dienste thun.

Vom Lachtermaaße (orgyca metallicorum) *).

Anmerkungen.

§. 30.

Nach des Herrn von Oppels Markscheidekunst 113. §. ist das Freybergische Lachter eine Länge

= 3 ½ Freyb. Elle
= 6 Fuß, 3 Zoll 10 ¾ Linien Rheinl. Mß.
= 6, 324653 rheinl. Fuß
= 75, 895833 rheinl. Zoll.

§. 31.

Sezt man dieses Lachter

= 3 ½ Leipz. Elle
= 7 Leipz. Fuß,

und

*) Hievon lese man besonders des Herrn Hofr. Kästners Anmerkungen über die Markscheidekunst, die 2. Anm.

und die Verhältniß des rheinländischen Fußes zum Leipziger

= 13918, 30 : 12520 (Mayers pract. Geom. S. 52)

= 139183 : 125200;

So hat man

$$1 \text{ Leipz. Fuß} = \frac{125200}{139183} \text{ Rheinl. Fuß}$$

= 0, 89235107 Rheinl. Fß.

= 10, 90821284 rheinl. Z.

Folglich

7 Leipz. F. = 6, 24645749 rheinl. Fuß

= 74, 95748988.

§. 32.

Das Lachter wird gemeiniglich in acht gleiche Theile, oder **Achtel** getheilet; jedes Achtel aber, in 10 gleiche Theile oder **Lachterzolle**; jeder solcher Zoll wieder in 10 gleiche Theile oder **Primen**, und so nach der Decimaleintheilung weiter.

§. 33.

Nach §. 31, wäre

$\frac{1}{8}$ Lacht. oder 10 Lachtz. = 9, 3646.. Rz.

$\frac{1}{16}$ " " " = 5 " " = 4, 6823.. Rz.

$\frac{1}{80}$ " " " 1 " " = 0, 93646.. Rz.

§. 34.

1) Es würde freylich bequem und vortheilhaft seyn, wenn bey der Eintheilung des Lachters, ganz die Decimaleintheilung befolgt worden wäre.

Indes-

Indessen muß man benöthigten Falls Achtellachter auf Decimaltheile des ganzen Lachters, bringen

II) Dieß geschiehet nach Ar. III. Cap. 3. §: Also

$\frac{1}{8}$ Lr. = 0, 125 Lacht.

Folglich

$\frac{2}{8}$ Lr. = 2 × 0, 125 Lr.
= 0, 250 Lr.;
$\frac{3}{8}$ Lr. = 0, 375 Lr.;

u. s. w.

III) So könnte man leicht jede Zahl der Achtellachter, von 1 bis 7 in eine Tafel bringen.

Diese hätte nicht allein bey den Achtellachtern ihren Nutzen; sondern auch bey den Lachterzollen, Primen ꝛc.; weil die Zahl die eine gewisse Menge Lachterzolle, Primen ꝛc. in Decimaltheilen des Lachters ausdrückt, zehnmal, hundertmal u. s. w. kleiner ist, als die Zahl die eine eben so große Menge Achtellachter in Decimaltheilen des Lachters anzeigt.

Z. E. 5 Achtellr. = 0, 625 Lr.

Aber

5 Lrzolle = 0, 5 Achtellr.
= 0, 0625 Lr.
5 Primen = 0, 5 Lrzolle
= 0, 05 Achtellr.
= 0, 00625 Lr.

IV) Die Bequemlichkeit die die Decimaleintheilung beym Rechnen verschaffet, kann man auch bey der gewöhnlichen Eintheilung des Lachters erhalten, wenn man mit dem Herrn Hofr. Kästner (Mark-

(Markscheidek. 2. Anm. 46 ꝛc.) das Achtellachter zur Einheit des Lachtermaaßes annimmt.

Thut man dieses, so heißt das Lachter = 8, und kann also das Product, das durch die Multiplication der Zahl der Lachter mit 8, herauskommt, an die Zahl der Achtellachter und deren Theile so schreiben, daß sich alle Ziffern zusammen nach den Gesetzen der Decimalarithmetik lesen lassen.

So wären z. B. 50 Lr. 3 Achtel, 6 Lachterzoll, 7 Primen = 403 Achtellr. 6 Lrz. 7 Pr.

$$= 403 \text{ Achtellr.} + 6 . \tfrac{1}{10} \text{ Achtlr.} + 7 . \tfrac{1}{100} \text{ Achtlr.}$$

$$= 403,67 \text{ Achtellr.}$$

§. 35.

Wäre z. B. 0, 572 Lachter vorgegeben, um zu finden, wie viel es Achtellachter wären: so setze man

$$0,572 = \frac{x}{8},$$

und man wird

$$x = 8 \times 0,572$$
$$= 4,576 \text{ Achtellr.}$$

erhalten.

Multipliciret man also die vorgegebene Zahl der in Decimaltheilen ausgedrückten Lachter mit 8; so giebt das Product die Achtellachter.

III.

Kurze Beschreibung der im 29. §. genannten Werkzeuge (instrumenta geometrarum subterraneorum).

a) Schnure, Kette und Lachterstab.

§. 36.

I) Gerade Linien anzugeben, bedienet sich der Markscheider, besonders über Tage, eine 10 bis 20 Lachter lange und etliche Linien dicke flächsene Schnur; in der Grube aber, sonderlich wo wegen der Feuchtigkeit bey dem Gebrauche izt genannter Schnur Unrichtigkeiten zu befürchten sind, die so genannte **Lachterkette**.

II) Diese ist, gemeiniglich 6 Lachter lang und besteht aus schwachen messingenen Gliedweise mittelst Ringe aneinander gehängten Drathe.

III) Die Entfernung zwischen jeden auf einander folgenden Mittelpuncten zwoer solchen Ringe müssen genau einerley Länge betragen.

IIII) Diese ist bey der gewöhnlichen Eintheilung des Lachters (32) meist $= \frac{1}{8}$ Lachter, zuweilen aber nur $= \frac{1}{16}$ Lachter:

V) Also in Rücksicht des Freybergischen Lachters (31) jene

$= 10,5$ Leipz. Zoll
$= 9,3646\ldots$ Rheinlz. } (31, 32)

diese aber

$= 5,$

= 5, 25 Leipz. Zoll
= 4, 6823... Rheinl. } (a. D.)

VI) Bey der zehntheilichten Eintheilung des Lachters ist gedachte Länge (IV) = $\frac{1}{10}$ Lachter: Also, in Betracht des Freybergischen Lachters

= 8, 4 Leipz. Zolle
= 7, 49574... Rheinl. Zolle.

VII) An den beyden Enden einer solchergestalt eingerichteten Lachterkette, werden ein paar, etwa einen Zoll im Durchmesser habende Ringe angebracht.

VIII) Uebrigens ist bey jedem halben Lachter ein Merkmal, bey jedem ganzen aber, ein messingenes Plätgen befindlich, auf dem man das wievielste Lachter es vom Anfangspuncte der Kette ist, bezeichnet hat.

§. 37.

Um mit der Schnur oder Kette die Absicht vorigen §. 6. (I) erreichen zu können, hat man noch messingene Schrauben nöthig, die oben ein hölzern Heft, unten ohngefähr die Gestalt eines Nagelbohrers haben, und meist 2 $\frac{1}{2}$ Zoll lang sind.

Diese werden bey Ziehung gerader Linien mit der Schnur oder Kette, in der Grube in Thürstöcke, Speitzen ꝛc. eingeschraubet, da man hiezu über Tage Pfähle, Zimmerböcke (welche, wo sie anzubringen, dazu am schicklichsten sind) Bäume und dergleichen braucht. —

§. 38.

§. 38.

I) Der eigentliche Gebrauch der Lachterkette (36, II) ist die Ausmessung gerader Linien.

II) Hiezu bedienen sich auch einige Markscheider des so genannten **Lachterstabes.**

III) Er ist ein gerader ohngefähr 1 Zoll breiter, $\frac{1}{2}$ Zoll dicker und 1 Lachter langer prißmatischer Stab, von gutem wohl ausgetrockneten Holze, auf der das Lachter in seine Achtellachter, ganze, halbe und viertel Zolle genau getheilet, auch an beyden Enden desselben, zu Vermeidung des Abstossens, eine messingene ohngefähr 1 Zoll lange Kappe angeschuhet ist.

In der Mitte des Stabes Breite ist der Länge nach eine kleine cylindrische Vertiefung angebracht, die sich in gerader Linie durch die ganze Stange erstrecket, und worein die ausgespannte und zu messende Schnur bequem paßt.

Mittelst dieser Vertiefung läßt sich die Ausmessung bequem und richtig bewerkstelligen, wenn man nur gehörig verfährt.

b) Gradbogen (libella).

§. 39.

Die Neigung zu finden, bedient sich der Markscheider der Hängewaage, Wasserwaage, oder des Gradbogens.

Dieser ist ein aus sehr dünnen geschlagenen messingenen Bleche verfertigter halber Kreis, so wie die

die III. Figur zeigt, und dessen Halbmesser auf dem Durchmesser KH der 10 und weniger Zolle beträgt, senkrecht steht.

Sein Rand, KIH, ist in 2 × 90° getheilt, und jeder Grad wieder in halbe und viertel Grade. Kleinere Theile, gewöhnlich 5 Minuten, schätzt man nach dem Augenmaaße.

Die Theilstriche müssen verlängert genau durch des Gradbogens Mittelpunct C, gehen.

Der Grade Anfang ist in der Mitte I des Randes, (da wo der auf dem Durchmesser KH senkrecht stehende Halbmesser den Rand schneidet).

Von diesem Anfang zählt man die Grade von 0° an, sowohl rechter als linker Hand, bis 90°.

In des Werkzeugs Mittelpunct C ist ferner ein Loth, L, so angebracht, daß es einige Linien über den Rand KIH hervorgehet.

Der Faden des Loths muß sehr fein, ein feiner seidner Faden, oder weich gesottenes Pferdehaar, seyn.

An den beyden Enden des Gradbogens Durchmessers, KH, befinden sich (bey K, H) zween Haken, davon der eine nach des Werkzeuges Vorderseite, der andere aber, nach dessen Rückseite gebogen, so daß wenn der Gradbogen an eine straff ausgespannte Schnur gehangen wird dieser Durchmesser, KH, ihr genau parallel ist, und das Werkzeug selbst sich mittelst dieser Haken in eine seigere Ebne stellt.

§. 40.

Anmerkung.

Die im vorigen §. beschriebene Einrichtung des Gradbogens ist die gewöhnliche, und man kann durch ihn einer Linie Neigung nicht ganz genau bis auf 5′ angeben.

Ein solcher Fehler aber hat in die Bestimmung der unbekannten Stücken keinen unbeträchtlichen Einfluß: daher hat der Herr Hofr. Kästner in seiner vortreflichen Anmerkung zur Markscheidekunst (6. Anm. 45 u. f. S.) einen Gradbogen vorgeschlagen, durch den sich der Neigungswinkel einer Linie bis auf 1 und 2 Minuten genau bestimmen läßt.

Man hat auch Gradbogen, die zugleich Sohle und Seigerteufe angeben. Wer diese zu kennen verlangt, der lese in des Herrn von Oppels Markscheidekunst den 428, 429, 430. §. und dazu des Herrn Hofr. Kästners vorhin angeführtes Buch, die 5. Anmerkung.

c) Compaß (Compassus).

§. 41.

Erklärung.

Zu Findung des Streichens braucht der Markscheider den **Compaß**, einen Kreis, der in 2 × 12 gleiche Theile oder **Stunden**, jede Stunde in 8 gleiche Theile, oder **Achtel**, und jedes Achtel,

meist

meist wieder in 2 gleiche Theile getheilet ist, und wodurch man vermittelst der Magnetnadel erwähnte Absicht erreichen kann.

§. 42.

Anmerkung.

Zu bessern Verständniß des Compasses nähere Einrichtung und seines Gebrauches müssen wir hier einige Erklärungen und Lehnsätze aus der mathematischen Geographie beybringen.

§. 43.

Unsere Erde ist ein runder Körper dessen eigentliche Gestalt ein zusammengedrucktes Sphäroid ist, das einer Kugel ziemlich nahe kommt.

Wir können daher in der Markscheidekunst, so wie in vielen andern Fällen, die Erde als eine vollkommene Kugel ansehen, deren Durchmesser = 6544040 Toisen, ohne dadurch einen merklichen Fehler zu begehen.

§. 44.

Sie drehet sich täglich um eine unveränderliche Axe, so die Erdaxe heißt.

Die beyden Puncte wo die Erdaxe in der Erdoberfläche eintrift, werden die Erdpole genennt, und zwar der eine auf der Halbkugel, wo wir Europäer wohnen, der Nordpol, der gegenüberstehende aber der Südpol.

§. 45.

Man denke sich auf der Oberfläche der Erdkugel einen größten Kreis dessen Ebne senkrecht die

Erdaxe schneidet; Dieser heißt der **Aequator**, und seine Ebne des **Aequators Ebne**.

§. 46.

Ein größter Kreis durch einen beliebigen Punct L auf der Erdfläche und durch beyde Pole (44) heißt des Orts L **Mittagskreis**, und dessen Ebne dieses Orts **Mittagsfläche**.

Jeder Ort auf der Erde hat also seinen eignen Mittagskreis und alle Mittagsflächen schneiden einander in der Erdaxe. (Geom. 49. S. 4. Z.)

§. 47.

Eines Orts L **Horizontalfläche** berührt die Erdfläche in L und wird von der durch L gehenden Mittagsfläche in einer geraden Linie geschnitten (Geom. II. Th. 2. Erkl. Anm.), die des Orts L **Mittagslinie** heißt.

Denkt man sich nun in der Ebne des Mittagskreises eine gerade Linie, die ihn im Puncte L berührt; so ist sie eine Tangente (Geom. 1. Th. 12. Erkl.) und zeigt die Richtung der Mittagslinie des Orts L. an. (Geom. 41. S. 6. Z.)

Alles dieses findet bey jedem Punct der Erdfläche statt.

§. 48.

Es hat also jeder Ort auf der Erde seine eigne Mittagslinie; aber die Richtungen derselben werden nicht mit einander parallel seyn: Doch werden sie unter folgenden Umständen der parallelen Lage sehr nahe kommen:

1) Wenn

1) Wenn die Puncte, wodurch die Mittagslinien gehen sehr nahe am Aequator liegen, und

2) wenn sie nicht weit von einander entfernet sind.

Dieser zweyte Umstand reicht schon in den meisten Fällen alleine zu, die Mittagslinien, als parallel anzunehmen, wenn nur die Oerter nicht gar zu weit von einander abstehen.

Und dieß ist eben der, auf dem in der Markscheidekunst der häufige Gebrauch des Compasses vorzüglich beruhet.

§. 49.

Wie aber eines Orts Mittagslinie, und also also auch Mittagsfläche gefunden wird, lehrt die Astronomie.

Bey folgenden Schriftstellern kann man sich deshalb Raths erholen.

Herrn Hofr. Kästners Astronom. Abhandl. 1. Samml. 3. Abh. §. 68;

De la Lande Astronomie, (Par. 1771) §. 155, 160 des Auszugs aus seinem größern Werke, der auch 1775 ins Deutsche übersezt ist.

Jac. Cassini von der Größe und Figur der Erde, 3. Cap.

Bodens Anleitung zu den astronom. Wissensch. 2. Th.

Rosts Astronom. Handbuch;

u. s. w.

§. 50.

Wenn man eine stählerne Nadel mit einem Magnet bestreicht, und sie so einrichtet, daß sie sich frey drehen kann; so lehret die Erfahrung, daß das eine Ende von ihr, sich nach der nordlichen Gegend, so wie das andere nach der südlichen richtet.

Jenes mag das **nordliche**, dieses das **südliche Ende** heissen.

§. 51.

Die Richtung der Magnetnadel schneidet meistens die Mittagslinie unter einen Winkel den man die **Abweichung der Magnetnadel** oder kurz: **die Magnetabweichung**, nennt.

Er ist periodisch veränderlich, und findet sich manchmal auf der westlichen Seite zuweilen aber auch auf der östlichen der Mittagslinien; im ersten Falle heißt die Abweichung **westlich** im zweyten aber **östlich**. Ueberdieß giebt es auch Gegenden, wo manchmal gar keine Abweichung ist.

Diese aber kann allemal, wie die Erfahrung lehrt, bey nicht gar weit von einander entlegenen Oertern, z. E. 10 und mehrere Meilen, ohne merklichen Irrthum für einerley angenommen werden.

Dieß wird aber auch in der Markscheidekunst beym Gebrauch des Compasses und der Mittagslinie vorausgesezt, ohne daß es vielleicht mancher Markscheider weiß, welches ihm auch nicht zuzumuthen ist.

§. 52.

§. 52.

I) Nun können wir die nähere Einrichtung des Compasses überhaupt beschreiben.

II) An eines hohlen messingenen 4 und weniger Zoll im Durchmesser habenden und ohngefähr 1 Zoll hohen Cylinders untere Grundfläche ist eine messingene Platte angelöthet, wo im Mittelpuncte besagter Grundfläche, (so des Compasses Mittelpunct heissen mag) sich senkrecht ein spitziger Stift erhebt, damit auf ihm die Magnetnadel die in der Mitte mit einem so genannten Hütgen versehen ist, und deren beyde Enden sich etwas von einander unterscheidend gemacht sind *), frey drehen kann.

III) Die Nadel, wenn sie gut und brauchbar seyn soll, muß sich auf dem Stifte sehr sanft und gleichförmig bewegen: das heißt, nicht faul seyn.

IIII) An der innern Seitenfläche des holen Cylinders, wird in einiger Entfernung vom Boden, oder der gedachten messingenen Platte, parallel mit dessen Ebne, ein Ring, der der Stundenring heißt, befestiget, auf dem sich die §. 41. bemerkten Abtheilungen befinden und mit der Magnetnadel in einer Ebne liegt.

V) Ueber diesen Cylinder befindet sich ein Glasdeckel um die Nadel vom Wind und dergleichen zu sichern.

VI) Die Stunden aber werden auf dem Ringe so verzeichnet:

*) Die Ursache zeigt die Folge (71, 01).

Auf dem Boden sind zween Durchmesser winkelrecht gezogen; den einen nimmt man für die Richtung der Magnetnadel an, bezeichnet daher seinen einen Endpunct mit SE, seinen andern mit ME, und heißt ihn die **zwölfte Stundenlinie**; des andern Durchmessers einen Endpunct hingegen, wird mit OM, und der andere mit OCC, bezeichnet; weil eine der Magnetnadel Richtung winkelrechte Linie die östliche und westliche Gegend am Horizont anzeigt. Diesen nun, nennt man die **Sechstestundenlinie.**

VII) Senkrecht über dem Puncte SE, und ME, schreibt man auf dem Stundenringe jedesmal 12, und läßt die Stunden von dem Puncte 12, (oder eigentlich 0) bey SE, (den man für der **Stunden Anfangspunct** annimmt) durch OR bis ME, und eben so von 12 bey ME durch OCC bis 12 bey SE, wachsen.

§. 53.

Zusatz.

Es gehet also jeder Durchmesser, den man sich durch den Mittelpunct des Stundenringes denkt, mit seinen beyden Enden durch einerley Stunde.

Z. E. der Durchmesser der mit der Zwölftenstundenlinie einen Winkel von 30 Graden! von Nord nach Ost macht, macht eben den Winkel von Süd gegen West, und hat an diesen seinen entgegengesezten Enden die Stunde 2.

§. 54.

§. 54.

Erklärung.

Eine seigere Ebne in der Richtung der Magnetnadel wollen wir die Magnetebne, und jede söhlige Linie in ihr, die Magnetlinie nennen.

§. 55.

Anmerkung.

Da die Magnetnadel nicht zu allen Zeiten einerley Richtung hat (51); so hat auch die Magnetebne nicht immer eine beständige Lage: doch kann diese ohne merklichen Irrthum auf kurze Zeit für einerley angenommen werden; und in so ferne kann man die Magnetebne als eine solche ansehen, nach der man das Streichen einer seigern Ebne und jeder Linie in ihr schätzet (18).

Da aber so das Streichen für eine und dieselbe seigere Ebne in der Folge nicht einerley bleibet; so muß man es allemal auf die Mittagsebne, welche allezeit in ihrer Lage beständig ist, zu beziehen suchen.

Dieß geschiehet bey dem Gebrauche des Compasses, wenn man die Abweichung der Magnetnadel weiß.

Wie diese zu bestimmen? findet man in Herrn von Oppel Markscheidekunst §. 438, 584, 685; ferner in einer Abhandlung des Herrn Bergmeister Scheidhauers, die in die Anzeige der leipziger ökonomischen Societät in der Michaelismesse 1772 eingerückt ist; auch in Herrn Hofr. Käst-

ners astronom. Abhandl. I. Samml. 324 u. f. S. und Herrn Prof. Röhls Steuermannskunst §. 32, 33; u. a. m.

§. 56.

Zusatz.

Eine seigere Ebne kann man sich, so groß man will, denken, und daher annehmen, daß jede die Magnetebne oder Mittagsfläche schneide.

Dieß kann auch von jeder söhligen Linie, bey Bestimmung ihres Streichen mit der Magnet- und Mittagslinie geschehen.

§. 57.

Zusatz.

Hierdurch geschiehet aber, daß eine seigere Ebne die Magnetebne sowohl als die Mittagsfläche, in zween Theile, den nördlichen und südlichen, theilet, sie hingegen selbst in den östlichen und westlichen, getheilet wird.

Eben das geschiehet auch von einer söhligen Linie mit der Mittags- und Magnetlinie.

§. 58.

Grundsatz.

Es ist klar, daß die Lage einer seigern Ebne oder jeder Linie in ihr, gegen die Mittagsfläche, durch den Winkel, den, entweder ihr östlicher Theil mit dem nordlichen, oder ihr westlicher mit dem südlichen der Mittagsebne macht, völlig bestimmt ist.

Eben dieß findet auch mit der Magnetebne statt;

so

so lange ihre Lage für beständig angenommen werden kann (55).

§. 59.

Erklärung.

Wir wollen, nun den Winkel den, entweder der östliche Theil einer seigern Ebne mit dem nördlichen der Magnetebne, oder ihr westlicher mit dem südlichen, macht, das **observirte Streichen**, und den Winkel den ihr östlicher oder westlicher Theil mit dem nördlichen oder südlichen der Mittagsfläche einschließt, das **reducirte Streichen** dieser seigern Ebne oder jeder Linie in ihr, nennen. (58, 18)

§. 60.

Anmerkung.

Wo es gleichgültig ist, ob man das reducirte oder observirte Streichen in Betracht ziehet; werde ich beydes zugleich unter dem Worte: Streichen, verstehen.

§. 61.

Zusatz.

Der Winkel den einer söhligen Linie östlicher Theil mit dem nordlichen, oder ihr westlicher mit dem südlichen der Magnet- oder Mittagslinie macht, ist gleich dem Winkel, unter welchen der östliche oder westliche Theil der durch diese söhlige Linie gehenden seigeren Ebne, im ersten Falle den nordlichen, im zweyten aber den südlichen der Magnet- oder Mittagsebne schneidet: Folglich izt

genann-

genannten seigern Ebne, und jeder andern Linie in ihr (20) observirten oder reducirten Streichen gleich, nachdem man auf die Magnet- oder Mittagsebne Rücksicht nimmt. (Geom. 48. S. und II. Th. 2. Erkl.)

Hieraus wird begreiflich, wie man mit dem Compaß, das observirte Streichen jeder Linie, finden kann.

§. 62.

Erklärung.

Man sagt von einer Linie AB (Fig. III.), daß sie sich von A nach B erstrecke, wenn A ihr Anfangspunct, von B nach A aber, also der vorigen Richtung entgegengesezt, wenn B ihr Anfangspunct.

Im ersten Falle, wollen wir sie mit AB im zweyten hingegen mit BA bezeichnen, also allemal den Anfangspunct voran setzen.

§. 63.

Zusatz.

Durch der Linie AB (Fig. IV.) Anfangspunct A, gehe die Magnet- oder Mittagsebne, desgleichen auch durch der Linie BA Anfangspunct B:

So wird zwar der Linie AB Streichen, gleich dem der BA seyn, (19. und Geom. 47. S. 6. Z.); aber, wenn AB auf der östlichen Seite der Magnetebne oder Mittagsfläche liegt, wird BA auf der westlichen liegen, und umgekehrt (62).

§. 64.

§. 64.

Erklärung.

Liegt die Linie AB auf der östlichen Seite der durch ihren Anfangspunct A laufenden Magnet- oder Mittagsebne; so heißt ihr observirtes oder reducirtes Streichen östlich, liegt sie aber auf der Westseite, westlich.

§. 65.

Zusatz.

Wenn eine Linie AB östliches Streichen hat, so hat die ihr entgegengesezte BA, westliches, und umgekehrt (62, 63).

§. 66.

Anmerkung.

Oestliches Streichen sey positiv, also westliches negativ.

§. 67.

Zusatz.

Nennt man die Stunden des Compasses in dem Halbkreis, wo OR steht, östlich und die im andern, westlich:

So läßt sich das östliche observirte Streichen durch östliche Compaßstunden, das westliche durch westliche, messen. (52, 64)

§. 68.

Zusatz.

Durch dergleichen Maaß kann man auch das reducirte Streichen angeben, welches sich so gleich

aus

aus dem observirten finden läßt, wenn man die Abweichung der Magnetnadel weiß.

§. 69.

Anmerkung.

Anzuzeigen, daß das in Stunden oder sonstigen Maasse ausgedruckte Streichen, östlich oder westlich sey, kann durch Vorsetzung des Worts: **Ost**, oder blos O, im ersten Falle; **West**, oder nur W, im zweyten Falle, geschehen.

Man könnte dieß auch mit OR und OCC bezeichnen; aber jene Bezeichnung ist kürzer und die Anfangsbuchstaben sind nicht leicht zu verwechseln: daher ist sie dieser leztern vorzuziehen.

Aus eben der Ursache bedienen sich auch einige Markscheider der Bezeichnung mit Sept. und Mer., welche aber leicht zu Verwirrung Anlaß geben kann, und der Sache gar nicht angemessen ist, ausser wenn bey dem observirten Streichen die seigere Ebne mit der Magnetebne einerley Lage hat; d. h. **wenn erst genannte Ebne oder jede Linie in ihr, entweder** Sept. 12, **oder** Mer. 12, **streicht; Jenes ist nach unserer Bezeichnung Ost** 0, **dieses aber Ost** 12 **oder West** 0.

In diesem Falle nur kann man, wenn man will, sich der Bezeichnung mit Sept. und Mer. bedienen.

§. 70.

Exempel.

Man setze, einer seigern Ebne Streichen sey 4 Stunden und 2 Achtelstunden, welches kurz so angezeigt wird:

$$4^h\ 2$$

das heißt aber: der Winkel den der östliche Theil der seigern Ebne mit dem nördlichen, oder ihr westlicher mit dem südlichen der Magnet- oder Mittagsebne macht enthalte

4 Stunden und 2 Achttheile einer Stunde;

das sind

$$= 4 \times 15^\circ + 2 \cdot \frac{15^\circ}{8} \quad (41)$$

$$= 60^\circ + \frac{15^\circ}{4}$$

$$= 63^\circ\ \tfrac{3}{4}$$

$$= 63^\circ\ 45';$$

Ist nun das Streichen östlich; so ist die Bezeichnung:

Ost $4^h\ 2$

oder nur

O. $4^h\ 2$;

bey einigen Markscheidern

OR 4 2,

auch

Sept 4 2;

ist es hingegen westlich; so bezeichnet man das durch:

West $4^h\ 2$

oder nur

W. 4^h 2;

einige durch:

OCC. 4. 2

oder

Mer: 4. 2.

§. 71.

Zusatz.

I) Es sey (Fig. V) C des Compasses Mittelpunct, und aus ihm mit CB auf einer söhligen Ebne ein Kreis NBSA beschrieben;

CN sey der nördliche Theil der durch C gehenden Magnetlinie SN, und AB die Zwölftestundenlinie, wo B der Punct sept. 12 seyn mag:

So ist der Winkel NCB, = SCA. das observirte Streichen der durch AB gehenden seigeren Ebne und jeder Linie in ihr. (61, 20)

II) Nach der Figur liegt CB auf der Ostseite von SN, und der Winkel BCN wäre daher das östliche observirte Streichen von AB, oder der durch sie laufenden seigern Ebne und jeder andern Linie in derselben (20, 61, 64).

III) Man drehe den Kreis in (I) herum bis B in A, wie in Figur VI, zu liegen kommt:

So behält SN ihre Lage, AB (Fig. VI) aber kommt in die Lage BA (Fig. V), und hat nun westlich observirtes Streichen, BCS (Fig. VI), das eben

so

so groß ist, wie das östliche observirte Streichen der AB in (II) [63].

IV) Da der

W. BCS = NCA (Fig. VI);

so kann der AB, im (III) westlich observirtes Streichen auch nach dem Winkel NCA, den CN mit CA, dem Theile der Zwölftenstundenlinie macht, dessen Endpunct, A, der Punct Mer 12, oder West 0, ist, (I, und 52, VI); schätzen, so wie der Linie AB in (II) östliches observirtes Streichen nach dem Winkel, unter welchem CN den Theil CB der Zwölftenstundenlinie schneidet, dessen Endpunct B der Punct sept 12 oder Ost 0, ist.

V) Zählet man nun (Fig. V) die Stunden von B nach N zu; so wird in N die Zahl der Stunden kommen, die NCB (II) enthält, und die Stunden selbst müssen östlich seyn (II, 67); Folglich der Punct OR, linker Hand B liegen (67).

Zählet man hingegen (Fig. VI) die Stunden von A nach N; so wird gleichfalls bey N die Zahl der Stunden zu stehen kommen, die der Winkel ACN enthält, die Stunden selbst aber, werden westlich seyn (II, und 67): Folglich muß B linker Hand A, d. i. rechter Hand B, stehen (67).

VI) Bey einem auf diese Art eingerichteten Compaß, wird man allezeit mittelst dem nördlichen Theile der Magnetnadel, das observirte Streichen jeder Linie, und ob es östlich oder westlich, finden, wenn die Zwölftestundenlinie in die durch

diese Linie laufende seigere Ebne so gebracht ist, daß der Punct sept 12, nach besagter Linie Endpunct zugekehrt ist (IV, V.).

§. 72.
Zusatz.

Der Compaß im 52. §. nach vorigen §. eingerichtet, giebt den Grubencompaß (Compassus fossorum).

§. 73.
Zusatz.

I) In dem auf einer söhligen Ebne verzeichneten Kreise AaB (Fig. VII) sey C dessen und des Compasses Mittelpunct;

ab die Zwölftestundenlinie;
a der Punct Sept 12, und
SN, die Magnetlinie, liege in ab:

So ist der Winkel NCB, = ACS, der Linie AB observirtes Streichen.

II) Nach der Figur ist aCB der AB östliches observirtes Streichen.

III) Man drehe den Kreis in (I) herum; so daß AB in die Lage BA, und ab in die Lage ba (wie Fig. VIII) kommt:

So wird der Winkel aCB der Linie AB (Fig. VIII) oder BA (Fig. VII) westliches observirtes Streichen.

IV) Gehen die Stunden (Fig. VII, VIII) von a nach B; so kommt in B die Zahl der Stunden die aCB enthält.

Diese

Diese müssen in der VII Figur östlich, in der VIII aber, westlich seyn (11, und 67):

Folglich muß von a weg rechter Hand OR, und linker Hand OCC, stehen (67).

V) Hierauf beruhet die Einrichtung des so genannten **Setzcompasses** (compassus iacens), von dem man die Beschreibung in allen Markscheidebüchern findet.

Er ist unbequem und daher wenig oder gar nicht mehr im Gebrauche.

§. 74.

Beschreibung.

Das Streichen einer **Donlegigten**, d. i. schiefen, oder solchen Linie, die gegen eine söhlige Ebene, unter schiefe Winkeln geneigt ist, zu finden, braucht der Markscheider den so genannten **Hängecompaß** (compassus pensilis).

Dieser ist nichts anders als ein **Grubencompaß** (72) in einem runden Kasten, in dessen Umkreise in der Ebne der Sechsteestundenlinie zween kleine runde Zapfen hervorstehen und im Durchmesser eines schmalen Ringes von messingenem Bleche beweglich sind.

An diesem ist ein anderer ebenfalls messingener aber etwas breiterer Ring dergestalt befestiget, daß seine Ebne in der Ebne der Zwölftenstundenlinie lieget.

An ihm sind in seiner Ebne in gleicher Weite von dem Orte des Zusammenstossens beyder Ringe, zween Haken wie bey dem Gradbogen angebracht.

Uebrigens ist die Einrichtung aller Theile dieses Werkzeugs so, daß wenn es mit izt genannten Haken, an eine straff ausgespannte Schnur gehangen wird, vermöge der eignen Schwere die Ebne des breitern Ringes und also der Zwölfstenstundenlinie in die durch die Schnur laufende seigere Ebne fällt, der Compaß selbst aber in eine söhlige Stellung tritt.

§. 75.
Anmerkung.

Ausser den bisher beschriebenen Werkzeugen sind bey den Markscheidern noch andere in Gebrauch.

Dahin gehört

1) Das Zuleginstrument (instrumentum lineationis) wodurch man jede Linie, deren Streichen gegeben ist, auf dem Papiere so verzeichnen kann, daß diese daselbst in eben der Stunde streicht. Man braucht es daher besonders zu Verfertigung söhliger Risse. Wir werden unten eine andere weit zuverlässigere Methode, dieß zu bewerkstelligen, zeigen, wodurch dann dieses Werkzeug ganz entbehrlich gemacht wird.

2) Der Winkelweiser (goniodictes) durch den man Linien in einer gegebenen Lage über Tage ziehen kann.

3) Die

3) Die Eisenscheiben (circuli horarii), durch die man das Streichen einer Linie ohne Magnetnadel, oder auch den Winkel zwoer söhligen Linien suchet.

Es ist nämlich bekannt, daß durch das Eisen die Magnetnadel aus ihrer gewöhnlichen Richtung gebracht wird, und deshalb bey ihrem Gebrauche nichts vom Eisen in der Nähe herum seyn darf: daher ist der Compaß an den Orten, wo Eisenerze brechen, nicht zu gebrauchen, wie wohl einige auf die Magnetnadel keine so starke Würkung äussern.

Dafür nun hat man die Eisenscheiben erfunden, deren Gebrauch aber mit vielen Unbequemlichkeiten und Unrichtigkeiten verbunden ist, wie aus dem Verfahren mit den Eisenscheiben leicht dargethan werden kann. (Kästners Markscheidekunst 8. Anm.)

Wir werden unten (XX) eine andere Methode zeigen, durch die man gleiche Absicht erreicht, und zuverlässiger ist.

Wer diese Werkzeuge und ihren Gebrauch genauer will kennen lernen, der findet in den Markscheidebüchern eines von Oppels, Beyers, Voigtels ꝛc. gnüglichen Unterricht. —

IV.

Gebrauch der beschriebenen Werkzeuge (III) und was dabey zu beobachten.

1) Zu Zuziehung und Ausmessung gerader Linien.

§. 76.

Foderungen.

Zwischen jeden zwo gegebenen Puncten mit der Schnur oder Kette eine gerade Linie zu ziehen;

Diese mit dem Lachterstabe oder der Lachterkette auszumessen;

§. 77.

Anmerkungen.

Dieß läßt sich besser zeigen als sagen, und ist auch schon aus der bloßen Kenntniß der hiezu erfoderlichen Werkzeuge (36, 37, 38) begreiflich: daher ich hier der Kürze halber, diese zween Sätze als Foderungen aufstelle.

Uebrigens findet man auch das Verfahren in Herrn v. Oppels Markscheidekunst 408 ꝛc. §. und andern angegeben.

Dafür aber werde ich hier, Anfängern wegen, einige Fehler erwähnen, die bey Ziehung und Messung gerader Linien (76) vorfallen können, und welche man in der Ausübung so viel als möglich vermeiden muß.

§. 78.

Bey Ziehung gerader Linien muß die Schnur oder Kette genau die Puncte berühren, wo die beyden Schrauben eingeschraubt sind.

Widrigenfalls erhält die Linie eine andere Lage und Größe, als sie eigentlich haben sollte.

Dergleichen Fehler ist man auch ausgesezt, wenn die Schnur oder Kette an- oder aufliget.

Diese Fehler sind leicht zu vermeiden. Hingegen nicht der, den die Krümmung der Schnur oder Kette verursachet.

§. 79.

I) Wenn man nämlich zwischen zween Puncten, eine Kette, so stark als nur immer möglich ausspannt; so wird man sie doch nie völlig in eine gerade Richtung bringen können, sondern sie wird sich vermöge der Schwere ihrer Glieder allemal gegen die Mitte zu etwas senken, dergestalt, daß diese Glieder alle gegen den Horizont eine gewisse Neigung bekommen.

Eben das geschiehet auch bey einer zwischen zween Puncten ausgespannten Schnur. Diese beugt sich aber in eine wirklich zusammenhängende krumme Linie, dahingegen die Glieder der Kette so gestellt werden, daß sie dadurch mehr den Umfang eines gewissen Vielecks bilden.

II) Die Natur dieser so entstehenden krummen Linie, haben **Leibnitz** und die beyden Brüder Bernoulli

noulli mit Hülfe der Rechnung des Unendlichen bestimmt, und die krumme Linie selbst die Kettenlinie genennt.*)

Sie findet bey den Gewölbern, gebrochenen Dächern, Brücken ꝛc. ihre vorzügliche Anwendung.**)

III) Es sey (Fig. IX) afb die zwischen a und b so stark als möglich ausgespannte Kette oder Schnur; so ist offenbar afb > ab.

Wenn man nun der Puncte a und b, wahre Entfernung sucht; so mißt man statt ab die krumme Linie afb. Man bekommt also diese Entfernung etwas zu groß. Dieser Fehler aber, der hierdurch begangen wird, ist nicht beträchtlich.

Denn je stärker die Schnur oder Kette gespannt wird, desto weniger krümmt sie sich, und desto näher also kommt sie der geraden Linie ab.

IV) Eine solche stark ausgespannte Schnur nun, wird die größte Krümmung machen, wenn die Puncte a und b in einer Horizontallinie liegen; sie wird sich aber desto weniger krümmen, je gröfser der Linie ab Neigung ist.

V) Wenn

*) Man sehe Ioh. Bernoulli Opp. Tom. III, IV.

**) Man sehe Iac. Bern. Op. Tom. II; Abhandl. der Königl. schwed. Akad. der Wissensch. IV. B. 135 u. f. S. und f. S. u. V. B. 251 u. f. S.; Lamberts Beytr. zum Gebr. der Math. 3. Th. 359 u. f. S.

V) Wenn nun eine söhlige Schnur ab = 10000, und an jedem ihren beyden Enden statt der Schrauben von einer Kraft die funfzigmal so groß als ihr Gewicht, gespannt wird: so beträgt der Fehler (III) noch kein Hunderttausendtheil dessen, was durch die Messung gefunden ward: Nämlich afb — ab < 0,00001 der Linie ab; wie Herr Hofr. Kästner (Markscheidekunst 3. Anm. 19, 20) gefunden hat. Dieser Fehler aber ist noch kleiner wenn die Schnur keine söhlige, sondern eine schiefe Lage hat. (IV)

VI) Hieraus sieht man, daß wegen der Krümmung der Schnur in Messung ihrer Länge nicht so gar viel Unrichtigkeit zu befürchten ist, wenn sie auch nicht so stark wie in (V) angenommen, gespannt wäre.

VII) Uebrigens lese man deshalb noch Herrn Prof. Mayers practischen Geom. 53. §.

§. 80.

I) Die Fehler die bey Messung einer geraden Linie mit der Lachterkette begangen werden können, hängen von der

I) Unvollkommenheit der Kette;

II) Unvorsichtigkeit des Markscheiders, und

III) Unmöglichkeit, eine völlig mathematische Genauigkeit zu erhalten,

ab.

Den aus I entspringenden Fehler hat man

1) in der Größe, und

2) Eintheilung der Lachterkette zu suchen.

Bevor man also Messungen anstellt, muß man die angebliche Länge der Kette, wohl prüfen.

Dieß kann etwa auf folgende Art geschehen:

2) Man nehme einen genau eingetheilten Lachterstab, oder verzeichne sich einen mit aller möglichen Sorgfalt;

Bestimme alsdann mit ihm, auf einem ebnen Boden, so genau als möglich, eine Länge von 6 Lachtern;

Bringe hierauf an diese die Lachterkette;

Spanne sie aus, und sehe ob ihre beyden Endpuncte völlig genau die 6 Lachter zwischen sich enthalten.

Um sich aber völlig von der eigentlichen Größe der Lachterkette zu versichern, thut man wohl, wenn man diesen Versuch einigemal wiederholet.

Fände man nun, die Lachterkette z. E. 2 Zoll länger als 6 Lachter: so müßte man in der Folge für jeden Kettenzug nur

6 Lachter — 2 Lachterzoll = $5\frac{7}{8}$ Lachter 8 Zolle rechnen.

Diese Prüfung der Kette ist besonders in dem Falle nöthig, wenn sie schon lange gebraucht worden; weil, wie die Erfahrung lehrt, die Glieder sich mit der Zeit in ihren Ringen abnutzen und aus-

ausschleifen, und dadurch die Kette verlängert wird.

Hingegen wird sie verkürzt, wenn die Glieder krumm sind, und nicht gehörig die gerade Richtung haben.

Eine andere Art die Länge der Kette zu prüfen, läßt sich auch aus Herrn Prof. Mayers angef. pract. Geom. 131 u. f. S. auf die Markscheidekunst anwendbar machen. —

3) Die Eintheilung der Kette zu untersuchen, darf man sie nur auf einen ebnen Boden sehr stark ausspannen;

Sie in dieser Lage liegen lassen;

Hierauf einen sehr genau eingetheilten Lachterstab, oder einen Maasstab, auf dem man nur $\frac{1}{2}$ Lachter mit seinen Theilen, genau verzeichnet hat, nehmen, und untersuchen, ob auf der Kette jede Entfernung von 1, oder $\frac{1}{2}$ Lachter genau die Länge des Lachterstabes, oder des auf dem Maasstabe verzeichneten halben Lachters, beträgt.

Auf diese Art wird man bald entdecken, wo in den Abtheilungen der Lachterkette merkliche Ungleichheiten stecken.

4) Die aus (II) entstehende Fehler sind

1) Wenn man nicht die Glieder der Lachterkette in jedem Falle gehörig auseinander macht; und wenn sich einige krumm gebogen, sie wieder in eine gerade Richtung bringt;

2) Wenn

2) Wenn die Kette nicht allemal gehörig ausgespannt oder angezogen wird;

3) Wenn bey dem Messen die gezogene Schnur nicht in ihre Lage gelassen wird.

4) Wenn an der Schnur nicht gehörig der Punct bemerkt wird, wo die Kette sich endiget und zu weiteren Messen wieder angehalten werden muß;

5) Wenn man bey jedem Kettenzuge der Lachterkette Endpunct nicht gehörig an die Schnur bringt, sondern von ihr abweicht.

2) Zu Findung des Neigungswinkel.

Aufgabe.

Mittelst des Gradbogens (39) einer Linie Neigung zu finden.

Auflösung.

§. 81.

I) Vorausgesezt, daß die so stark als möglich ausgespannte Schnur AB (Fig. XI) wirklich in einer geraden Linie liegt oder ohne merklichen Irrthum dafür angesehen werden kann (79, III, VI,):

So hänge man an sie den Gradbogen FDE;

II) Der Perpendikel Cp wird den Bogen Dp abschneiden, der die Zahl der Grade des gesuchten Neigungswinkel, enthält.

Beweis.

III) Denn eine durch AB laufende seigere Ebne, in der der Gradbogen vermöge seiner Vorrichtung liegt

liegt (39), wird die durch den Anfangspunct gehende söhlige Ebne in der söhligen Linie AG schneiden (5) und der Winkel BAG der Linie AB Neigung seyn (15, und Geom. II. Th. 1. Erkl.).

Nun ist CH, des Perpendikels Cp Richtung, eine seigere Linie, (5) folglich, (da AH söhlig) das Dreyeck AHC bey H rechtwinklicht (6), und der Winkel

$$BAG + ACH = R \text{ (Geom. 13. S. 2. Z.)}$$
$$= ACH + HCD \text{ (39)}$$

Folglich:

$$BAG = HCD,$$
$$= pCD,$$

dieser Winkel aber enthält, so viel Winkelgrade als Dp Bogengrade, welche von D nach F und E zu gezählt werden.

Anmerkung.

IV) Wenn das Perpendikel nicht genau irgend einen Theilpunct der ganzen, halben, oder viertel Grade deckt; so schätzt man zwischen den zween Theilstrichen, zwischen die das Loth fällt, (indem man den Raum, den sie einschliessen, nach dem Augenmaaße in 3 gleiche Theile theilt) fünf Minuten, die man in Freyberg, mit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer durch p (plus) oder m (minus) bezeichnet, nachdem das Perpendikel 5′ über einen Theilstrich nach 90° zu, oder so viel vor denselben nach 0° zu, deckt; d. i. nachdem die 5′ positiv oder negativ zu nehmen sind.

V) Da

V) Da die ausgespannte Schnur oder Kette nie in einer geraden Linie liegt (79): so ist es zwar nicht gleichgültig, an welcher Stelle der Schnur der Gradbogen zu hängen ist, um eine Neigung anzugeben, die der Neigung der geraden Linie zwischen ihren Endpuncten gleich ist: Allein der Fehler wird desto kleiner seyn, je größer der Schnur Neigung ist, und oft viel weniger betragen, als der Gradbogen anzuzeigen im Stande ist (79, III, V).

Herr von Oppel hat in seiner Markscheidekunst §. 426. aus Betrachtungen der Kettenlinie darüber Vorschriften herzuleiten gesucht; Allein er hat nur gefunden, daß man den Gradbogen desto weiter unter der Mitte der Schnur hängen müsse, je größer ihre Neigung sey.

Herr Hofr. Kästner meynt (Markscheidekunst 3. Anm. 34) daß es wohl am besten wäre, die Schnur so stark als sie verträgt zu spannen, den Gradbogen an ein paar Stellen anzuhängen, und wenn er nicht ganz unmerklich Unterschiede angiebt, das Mittel dazwischen zu nehmen.

Einige Markscheider thun auch dieß, indem sie den Gradbogen einmal gegen das obere Ende, das anderemal gegen das untere Ende der Schnur hängen und das arithmetische Mittel nehmen.

§. 82.
Erklärung.

Einer schiefen Linie AB Endpunct B liegt entweder über oder unter der durch ihren Anfangspunct A gehenden söhligen Ebne.

Liegt

liegt B darüber: so sagt man von AB sie steige; Ist aber B darunter: sie falle.

§. 83.
Zusatz.

Wenn daher des Gradbogens Perpendikel sich nach dem Anfangspunct A zu neigt; so steigt die Linie AB; Geschieht dieß aber nach dem Endpunct B, zu, so fällt sie.

§. 84.
Anmerkung.

Die Neigung einer Linie sey positiv, wenn sie steigt, negativ aber, wenn sie fällt.

Also auch ihre steigende Seigerlinie bejaht und ihre fallende verneint (eb. Tr. 3. Erkl. 4. Z.)

§. 85.
Zusatz.

Wenn eine Linie die sich von A nach B (Fig. XI) erstrecket, oder AB, steigt; so fällt die, die sich von B nach A erstreckt, d. i. BA (62).

Ist daher der Linie AB Neigung

$$= \pm \alpha;$$

so ist der Linie BA Neigungswinkel

$$= \mp \alpha.$$

§. 86.
Anmerkungen.

Die Fehler des Gradbogens, können seyn,

1) die unrichtige Eintheilung des Randes,

2) die

2) die nicht gehörige Feinheit der Theilstriche,
3) die Verbeugung der Haken.

Von allen diesen wollen wir hier, Anfängern wegen, etwas beybringen.

§. 87.

Für 1) (86)

Die meisten Mechanici theilen den Gradbogen, wie alle Winkelmesser, mittelst der so genannten Theilscheibe; Dieses Verfahren aber giebt nie den gehörigen Grad der Richtigkeit: Daher hat man, bevor man von dem Gradbogen Gebrauch macht, seine Eintheilung zu untersuchen.

Herr Prof. Mayer giebt in seiner practischen Geometrie §. 89. eine bessere Methode kleine Winkelmesser, dergleichen Gradbogen, Compaß ꝛc. zu theilen, an; und sie könnte daher mit gutem Erfolg auf die genannten Markscheiderwerkzeuge angewandt werden. *)

II) Ehe ich zu einigen Methoden, die Gradabtheilung der Wasserwage zu prüfen übergehe, wird es dienlich seyn folgendes vorauszuschicken.

III) Bey den astronomischen Werkzeugen pflegt man heut zu Tage sehr oft den Quadranten in 96 gleiche Theile (welches die 96 Theilung heißt) zu theilen.

Diese

*) Ueber die Eintheilung der Winkelmesser, und dergleichen, ist vorzüglich Herrn Hofr. Kästners 5te astr. Abh. 17, 18, und 19. §. nachzulesen.

Diese Eintheilung (welche auch beym Compaß (52) befolgt wird) läßt sich sehr bequem und genau bewerkstelligen, weil man durch den Halbmesser den Bogen von 60° und folglich durch eine Halbirung den von 30° leicht bestimmen kann, überdieß aber, den Bogen von 30° nur noch fünfmal zu halbiren braucht.

Denn

$$\frac{1}{2.2.2.2.2} \cdot 30^\circ, = \frac{1}{2.2.2.2.2} \cdot \tfrac{1}{3}\, 90^\circ,$$

ist = dem 96ten Theil eines Quadranten.

Da nun

$$\tfrac{1}{96} \cdot 90^\circ = 56' \; 15''$$

so läßt sich leicht

$$\tfrac{2}{96} \cdot 90^\circ;$$
$$\tfrac{3}{96} \cdot 90^\circ;$$

und überhaupt jedes Vielfache von

$$\tfrac{1}{96} \cdot 90^\circ = 56' \; 15''$$

berechnen, und in eine Tafel bringen.

Diese würde dazu dienen, Winkel, die in 96 Theilen des Quadranten bekannt, durch Grade und Minuten auszudrücken.

Man sieht leicht, daß und wie sich auf dem Gradbogen, (und überhaupt auf jeden Winkelmesser) mittelst concentrischer Kreise beyde Eintheilungen, die 96 **Theilung** so wohl als die **Gradabtheilung** oder 90 **Theilung**, anbringen lassen.

Es wäre wirklich gut, wenn sich die Markscheider beyder Eintheilungen auf ihren Gradbogen ꝛc. zu bedienen suchten. Denn dieß diente zur wechselseitigen Prüfung und selbst zur genauen Ausmessung eines Winkels.

Das Loth beym Gradbogen, wird ihnen der Schnur Neigung so wohl in den gewöhnlichen Graden als Theilen der 96sten Theilung anzeigen. Reducirt man die angegebene Zahl der Theile der 96sten Theilung auf Grade und Minuten: so muß ihre Menge, gleich der vom Lothe unmittelbar angegebenen seyn. Ist dieß nicht; so ist ein Fehler in der Theilung oder bey den Haken, oder sonst, vorgefallen. Durch den Unterschied dieser beyden Mengen aber, ergiebt sich, um wie viel Minuten man in Bestimmung des Neigungswinkels ungewiß ist. Nimmt man von beyden Mengen das arithmetische Mittel, so kommt man der Wahrheit ziemlich nahe.

IV) Nun die Unrichtigkeiten in den Abtheilungen des Gradbogens zu bestimmen, können folgende Methoden dienen.

1) Will man blos untersuchen, ob Fehler da seyen; so darf man nur einen guten Stangenzirkel haben, und zwischen seinen beyden Spitzen, mit aller nur möglichen Schärfe einen gewissen Bogen fassen; dann prüfen, ob diese Weite durchgehends auf der ganzen Peripherie von gleicher Größe sey.

Der-

Dergleichen Verfahren, kann man erst mit dem Bogen von 90°, anstellen, um zu erfahren, ob der Halbkreis gehörig in zween gleiche Theile getheilt und also der Punct 0° genau in der Mitte des Randes sey; Hierauf dieß bey dem Bogen von 45° thun, und sehen, ob diese Weite genau viermal in dem halben Umkreis enthalten; Dann eben das mit dem Bogen von 30° u. s. w. vornehmen.

Auf diese Art läßt sich überhaupt allemal entdecken, wo Unrichtigkeiten in den Abtheilungen des Gradbogens Rande vorgefallen sind.

2) Ihre Größe zu bestimmen sey (Fig. XIV) b ein auf den Gradbogen angegebener Theilpunct, den man aber unrichtig befunden hätte (IV, 1) und eigentlich in m liegen müßte.

Gesezt b habe so eine Lage, daß der Bogen ab, und also auch der Winkel bca = μ Grade (wo μ eine ganze und gebrochene Zahl seyn kann) enthalten sollte. In der That aber ist er nicht so groß, sondern der Bogen ma, und also der Winkel mca.

Der Bogen ba also ist entweder um den Bogen mb zu klein oder zu groß, nachdem m linker oder rechter Hand b liegt. Im ersten Falle ist m bejaht im zweyten verneint.

Wüßte man nun, wie viel Grade Minuten ꝛc. der Bogen ab eigentlich enthielte: so wüßte man auch den Bogen mb.

Sucht man folglich den Winkel bca, so läßt sich sehr leichte mcb finden, und dann hat man gleich mb selbst.

Es sey daher des Gradbogens Halbmesser oder

$$ca = a,$$

des Bogens ba Sehne (welche man auf einen genau eingetheilten Maaßstabe mit aller nur möglichen Schärfe zu messen und in eben dem Maasse in dem a ausgedruckt ist, zu bestimmen hat), oder

$$ab = c;$$

so ist

$$\text{Cof bca} = 1 - \frac{c^2}{2a^2} \text{ (eb. Tr. 20. S. 33)}$$

Hätte man auf die Art den Winkel $bca = v$ in Graden und deren Theile gefunden, so wird

$$W.\ mcb = \mu - v$$

seyn.

So läßt sich allemal finden, was man bey einem unrichtig abgetheilten Gradbogen ab, den das Perpendikel angiebt, noch zuzusetzen, oder davon wegzunehmen habe.

Hat man dieß für alle falsche Theilpuncte gefunden, und in eine Tafel gebracht: so kann man auch mit einem unrichtig eingetheilten Gradbogen messen.

3) Diese Methode könnte schon hinreichend seyn, ihre Absicht zu erfüllen; freylich müßte man

den

den Punct a, wo es am besten wäre, zu nehmen suchen, welches eine kleine Ueberlegung leicht giebt.

Indessen kann auch die 96 Theilung (III) auf den Gradbogen angebracht, zu gleicher Prüfung dienen, wenn sie richtig ist, welches fast allemal vorausgesezt werden kann, da diese Eintheilung mit keiner Schwierigkeit verbunden ist (III), hingegen die Gradabtheilung schon etwas mühsamer, ist.

Die Prüfung nun mit der 96sten Theilung vorzunehmen, darf man nur verschiedene Schnuren ziehen, und bemerken, wie viel Grade und deren Theile so wohl, als Theile der 96 Theilung das Loth anzeigt; diese leztern auf Grade reducirt, müssen mit den vom Lothe angegebenen von gleicher Anzahl seyn. Ist dieß nicht; so zeigt der Unterschied den Fehler.

Bey richtiger 96 Theilung zeigt schon das Zusammenpassen gewisser Theilstriche von ihr, mit welchen von der Gradabtheilung, ob Fehler in lezterer vorhanden seyen.

4) Wenn man gezogener Schnuren Neigung schon weiß, kann man auch die Abtheilung des Gradbogens prüfen.

Diese Neigung würde am einfachsten gefunden, wenn man von einem Puncte der Schnur ein Loth herab hängen liesse, auf dem Winkel der so entsteht, und α heissen mag, die Schenkel so scharf als möglich, überdieß des Dreyecks, das sie gä-

ben, dritte Seite mäße und α daraus berechnete (20. S. eb. Tr.)

Dieß Verfahren schlägt auch Herr Hofr. Kästner in seiner Markscheidekunst auf der 49. S. seinen Grabbogen in Rücksicht der Haken zu prüfen, vor.

Mir scheint es auch zur Prüfung der Abtheilungen dienlich; wenn das andere am Gradbogen alles richtig ist. —

Hat man also α; so giebt 90° — α der Schnur Neigung.

§. 88.

Für 2) (86)

Hier hat man zu suchen, wie viel Sekunden jeder Theilstrich auf des Randes Umkreis einnehme.

Dazu muß ausser des Grabbogens Halbmesser = a, die Dicke der Theilstriche bekannt seyn; diese sey = b, (welche man nach dem Augenmaaße schätzen kann). Heißt nun die gesuchte Anzahl Sekunden = x; so ist

$$x = \frac{b}{a} . 206264 \text{ Sek.}$$

Denn die halbe Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser = a, ist

$$= a . 3,1415 \ldots\ldots$$

und enthält

648000 Sekunden

Also

Also

$$a \cdot 3,1415\ldots : b = 648000'' : x''$$

woraus x wie angegeben folgt.

Exempel.

Wäre

$$a = 5''$$
$$b = 0,01 \text{ Zoll}$$

so erhielte man

$$x = \frac{0,01 \cdot 206264}{5}$$
$$= 6' 52'',53.$$

Ein Gradbogen also, bey dem der Halbmesser = 5 Zoll, alles übrige richtig, und der Theilstriche Dicke = $\frac{1}{100}$ Zoll ist, ist in Rücksicht lezterer, einem Fehler von $6' 52'',53$ unterworfen.

Dieser vermindert sich, wenn man

$$b = 0,001$$

macht: Man erhält so

$$x = \frac{0,001 \cdot 206264}{5} \text{ Sek.}$$
$$= 41'',253.$$

Aus dem allen aber sieht man, daß, ausser der Gleichheit der Theile, eine der nothwendigsten Eigenschaften, eines Gradbogens, wie jeden Winkelmessers, ist, die Theilstriche so zart als möglich, aufzureissen, und den daher zu befürchtenden Fehler nicht ausser Acht zu lassen.

§. 89.

Für 3) (86)

I) Wenn des Gradbogens Haken verbogen sind, so ist sein Durchmesser nicht der Schnur parallel, und man erhält einen andern Winkel als man sucht.

Den wahren Winkel und den Fehler nun zu finden, dient folgendes.

II) KS, und HT (Fig. XV) seyen die Haken, aber ungleich; so muß der Durchmesser KH mit der Schnur MN einen gewissen Winkel MEK machen.

Dieser sey $= \Phi$; und der Schnur MN Neigung oder

$$MNO = \mu;$$

III) Das Loth CP schneide bey L auf des Gradbogens Rande den Bogen IL ab; so ist

IL = der Linie KE Neigung.

Denn es sey durch E eine Horizontalebne gelegt, und VE eine in ihr durch den Punct, wo das Loth von K auf sie eintrift, und durch E gezogene Linie, so ist der Winkel KEV, der KE Neigung, dieser Winkel aber ist = ICL; folglich = IL;

IV) Dieser Bogen heiße γ: so ist

$$\gamma = \mu - \Phi.$$

Wüßte man also anderswoher μ; so hätte man alsbald

$$\Phi = \mu - \gamma;$$

V) Weiß

V) Weiß man aber (wie gewöhnlich) μ nicht; so mache man es so:

An eben die Schnur hänge man den Gradbogen verkehrt, wie die XVI. Fig. zeigt, wo

XV. F. | K | H | C | P
XVI. F. | k | h | c | p

Also der Winkel

$$ken = KEN$$
$$= \Phi$$

Hier sey der Bogen il, als das Maaß des Winkels icl, $= \delta$.

Diesen giebt der Gradbogen an.

Aber icl = der Linie hk Neigung, (III) und diese

$$= \mu + \Phi \text{ (II, III)}$$

V') Folglich

$$\delta = \mu + \Phi$$

daher

$$\gamma + \delta = (\mu - \Phi) + (\mu + \Phi) \text{ [IV]}$$
$$= 2\mu$$

mithin

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta)$$

Wenn man also den Gradbogen an die Schnur zweymal anhängt; so findet man ihre wahre Neigung, durch die halbe Summe der Winkel die der Gradbogen jedesmal angiebt, ohne seinem Fehler oder Φ, zu wissen.

VI) Dieser aber findet sich durch die halbe Differenz des was jedesmal der Gradbogen angiebt, wenn er zweymal an die Schnur gehangen wird, (wie in V).

Denn

$$\Phi = \mu - \gamma \text{ (III)}$$

Aber

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta) \text{ [V]}$$

Folglich

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}\delta - \gamma$$
$$= \tfrac{1}{2}(\delta - \gamma)$$

VII) Behält der Gradbogen diesen Fehler ungeändert bey, so kann man nur jeder andern Schnur Neigung blos durch einmaliges Anhängen finden.

Denn nach (III) ist

$$\mu = \gamma + \Phi$$

und nach (V')

$$\mu = \delta - \Phi.$$

Die erste Formel gilt, wenn die Stelle K an dem Gradbogen aufwärts, die zweyte aber, wenn sie unterwärt gekehrt wird.

VIII) Herr Hofr. Kästner hat dieß Verfahren zuerst in seiner Markscheidekunst 4. Anmerk. gezeigt. Wir haben darnach das bisherige mit einiger Aenderung vorgetragen.

Die Markscheider beugen gewöhnlich die Haken so lange, bis das Loth des Gradbogens, einmal an die

die Schnur auf eine Seite, das anderemal verwand angehänget, genau einerley giebt.

Dieß Verfahren aber ist nicht von Brauchbarkeit.

3) Findung des observirten Streichen.

§. 90.
Aufgabe.

Jeder Linie AB observirtes Streichen, und dessen Beschaffenheit, d. h. ob es östlich oder westlich sey, mit dem Grubencompaß anzugeben.

Auflösung.

Man bringe die 12te Stundenlinie in die Lage der durch AB gehenden seigern Ebne oder in einer mit ihr gleichlaufenden dergestalt, daß Sept. 12 nach dem Endpuncte B der Linie AB zusieht.

So zeigt das nördliche Ende der Nadel unmittelbar die Zahl der Stunden an, die der Linie AB Streichen enthält, d. h. die Stunde in der AB streicht (71, VI und Geom. 47. S. 6. Z.).

Geschieht dieß nun in dem östlichen Halbkreise, d. i. in dem wo OR steht; so ist der Linie AB observirtes Streichen östlich; geschieht es aber in dem westlichen, d. i. in dem wo OCC sich findet; so ist es westlich (67).

§. 91.
Aufgabe.

Mit dem Hängecompaß einer schiefen Linie

nie AB, observirtes Streichen, und dessen Beschaffenheit zu finden.

Auflösung.

Dieß ist nur ein besonderer Fall des vorigen §.; da vermöge des Werkzeugs Einrichtung die Zwölfstundenlinie in der durch AB gehenden seigern Ebne allemal zu liegen kommt, und zwar so, wie es nach des 71 §. VI seyn soll, wenn man den Hängecompaß an die die Linie AB vorstellende Schnur hängt, daß Sept. 12 nach der Linie Endpunct B zusieht.

Das nördliche Ende der Magnetnadel also, wird, wie im vorigen §. der AB observirtes Streichen und dessen Beschaffenheit, anzeigen.

§. 92.

Anmerkung.

Wenn das nördliche Ende der Magnetnadel, (welches wir der Kürze wegen, allemal blos das nordliche Ende heißen wollen) nicht genau auf einem Theilstrich des Stundenringes weißt; so schäzt der Markscheider nach dem Augenmaaße auch Viertheile von Achtelstunden, oder zwey und dreyßig Theile der ganzen Stunde; von jedem solchen Theile aber, kann man noch Drittheile, (d. h. 96 Theile der ganzen Stunde) schätzen, und ein solches Drittheil, mit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer, durch p (plus), oder m (minus) bezeichnen, nachdem es für bejaht oder verneint zu nehmen ist.

§. 93.

§. 93.

Exempel.

Gesezt, das nördliche Ende hätte im östlichen Halbkreise zwischen den zween Theilstrichen, innegestanden, davon der eine von dem Puncte Sept. 12, (welchen Punct wir durch 0^h, so wie Mer. 12 durch 12^h bezeichnen wollen,) um $6^h\,4$ und der zweyte um $6^h\,5$ absteht: So würde man diesen Abstand des nördlichen Ende durch die im vorigen §. gedachten kleinen Theile der Stunde mittelst Schätzung nach dem Augenmaaße zu bestimmen suchen.

Hätte man nun gefunden, daß das nordliche Ende von dem Theilstriche der von 0^h und $6^h\,4$ entfernet ist, etwas über $\frac{3}{4}$ Achtelstunde abstünde, das ohngefähr $\frac{1}{3}$ der Viertelsachtelstunde, also ohngefähr $= \frac{1}{96}$ Stunde betrüge; so würde der Linie AB (91, 92) östliches Streichen

$$6\text{ St.} + 4\tfrac{3}{4}\text{ Achtelst.} + \tfrac{1}{96}\text{ (d. s.} = 99^\circ\ 3'\ 45''\ [39])$$

enthalten.

Dieser Ausdruck läßt sich (69, 79,) verkürzt so schreiben

$$6^h\,4\tfrac{3}{4}\,\mathrm{p}$$

und da das Streichen östlich angenommen, sezt man, um dies anzudeuten, Ost oder O vor, wie folget

$$\text{Ost } 6^h\,4\tfrac{3}{4}\,\mathrm{p}$$
$$\mathrm{O}\ 6^h\,4\tfrac{3}{4}\,\mathrm{p}$$

welches alles mit §. 69, 70 überein kommt.

Käme also, zum fernern Beyspiele, der Ausdruck:

W 2^h $3\frac{1}{4}$ m, oder

W 2^h $3\frac{1}{4}$ m

vor; so bedeutet er westliches Streichen, das

$= 2$ St. $+ 3\frac{1}{4}$ Achtelst. $- \frac{1}{96}$ St.

Anmerkungen.

§. 94.

Nach des 52. §. VII, gehen die westlichen Stunden von 12^h durch OCC. bis 0^h. Man kann aber auch mit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer, die westlichen Stunden von 0^h durch OCC, bis 12^h zählen, sie daher als verneinte Stunden ansehen und also dadurch das westliche Streichen angeben.

Man kann also unter, z. E.

W 0^h oder 12^h, $= 0^h$
W 0^h 7, $= 0^h$ 1
W 0^h 3, $= 0^h$ 5
W 11^h, $= 1^h$
W 9^h 6, $= 3^h$ 2

u. s. w.

verstehen. Ueberhaupt also,

W $\beta^h = -(12^h - \beta^h)$,
$= -\gamma^h$, (wenn $12^h - \beta^h = \gamma^h$)

setzen: Folglich kennen wir

Ost 0^h 3, z. E. mit $+ 0^h$ 3
$= 9^h$ $+ 9^h$
$= 4^h$ 3 $+ 4^h$ 3

u. s. w.

also, überhaupt

Ost β^h mit + β^h

bezeichnen.

Es könnte dieß auch blos mit β^h geschehen; aber β^h kann die Stunden des östlichen Streichens so wohl als des westlichen anzeigen.

Wenn wir daher sagen: Eine Linie streicht z. E. 4^h; so kann es östlich sowohl als westlich seyn.

§. 96.

Das Streichen ganz allgemein zu bezeichnen, kann durch einen bloßen Buchstaben geschehen.

Wenn wir nun dieß, z. E. durch β thun; so kann β in Stunden oder Graden ausgedrucktes östliches oder westliches observirtes oder reducirtes Streichen bedeuten.

Das östliche Streichen werden wir in dieser Rücksicht durch + β und dergleichen, das westliche durch — β, u. d. anzeugen.

Z. E. Wenn einer Linie AB Streichen östlich also + β wäre, so wäre der Linie BA ihres westlich, folglich — β (65, 66); Aber — β in Stunden angegeben, würde

$$W\ \beta^h = -(12^h - \beta^h),$$

so wie + β in Stunden

$$= +\beta^h = \text{Ost}\ \beta^h$$

seyn. (vor. §.)

§. 97.

Winkel durch Stunden ausgedruckt, hat der

Mark.

Markscheider oft zu trigonometrischen Rechnungen nöthig.

Man muß daher zuvor die Stunden in Graden verwandeln.

Diese Verwandlung aber sich zu erleichtern, darf man nur eine Tafel berechnen. Dieß geschieht sehr leicht.

Denn

$$1 \text{ Stunde} = \frac{360°}{24} \quad (39)$$
$$= 15°;$$

also

$$2 \text{ St.} = 2 \cdot 15°$$
$$= 30°$$

u. s. w.

Ferner

$$\tfrac{1}{8} \text{ St.} = \frac{15°}{8}$$
$$= 10° 52' 30''$$

daher

$$\tfrac{2}{8} \text{ St.} = 2\,(1° 52' 30'')$$
$$= 3° 45'$$

u. s. w.

In Herrn Hofr. Kästners Markscheidekunst, 7. Seite, findet man eine solche Tafel, wo das kleinste Glied $\frac{1}{32}$ Stunde genommen.

Einige

Einige Fehler auf die man beym Gebrauch des Compasses zu sehen hat.

§. 97.

Diese können seyn, wenn

1) die Abtheilung des Stundenringes unrichtig ist;

2) Die Theilstriche nicht die gehörige Feinheit haben;

3) Die Magnetnadel nicht gehörig spielt.

4) Die Ebne der Zwölfstenstundenlinie nicht mit der Ebne des breiten Ringes am Hängecompaß, in der durch die Schnur laufenden seigern Ebne lieget.

§. 98.

Was 1) (97) anbelangt; so hat eine genaue Abtheilung des Stundenringes keine Schwierigkeit, weil man alles durch Halbirungen bewerkstelligen kann; aber Stundenringe mittelst der Theilscheibe getheilt, werden fast allemal fehlerhaft seyn.

Diese Abtheilungen nun zu prüfen, läßt sich auf ähnliche Art, wie §. 88. IV, 1, 2, verfahren, wobey man die Stunden auf Grade zu reduciren, nicht vergessen darf.

Wüßte man nicht des Stundenringes Halbmesser; so nehme man die Sehne von $60^{\circ} = 6^{h}$, und messe sie so scharf als möglich auf einem ge-

nau eingetheilten Zollstabe aus. Was man erhält ist = des Stundenringes Halbmesser (Geom. 23. S. 5. Z.)

§. 99.

Den Fehler, in Rücksicht der Dicke der Theilstriche (97, 2)) schätzt man auf ähnliche Art, wie §. 89.

Ist des Stundenringes Halbmesser = a, die Dicke eines Theilstrichs = b; und die Anzahl der Sekunden, die er auf dem Stundenringe einnimmt = x; so ist

$$x = \frac{b}{a} . 206264$$

Exempel.

Wäre b = 0, 001 Zoll
a = 2 Zoll;
so erhält man

$$x = \frac{0,001 . 20626}{2}$$

$$= 1' 43'', 134$$

Für
b = 0, 01 Zoll,
bekommt man
x = 17′ 11″, 34.

Hieraus sieht man, daß die Theilstriche so fein als möglich zu reissen sind, da schon auf einem Stundenringe von 4 Zoll im Durchmesser, ein Theilstrich dessen Dicke = 0, 01 Zoll, einen Bogen von 17′ 11″, 34 einnimmt.

Nun

Nun ist eben nicht allemal ein Theilstrich so fein und des Stundenringes Durchmesser 4 Zoll: daher ist in solchen Fällen der Compaß wegen der Dicke der Theilstriche einen noch größern Fehler unterworfen: und man darf also diesen gar nicht ausser Acht lassen.

§. 100.

Was der Fehler 3)(87) betrift, so ist eine Magnetnadel faul, wenn

1) ihr nicht die magnetische Kraft gehörig mitgetheilt worden,

2) der Stift, worauf die Nadel ruhet stumpf ꝛc. ist,

2) des Hütgens innere Höhlung nicht sehr glatt polirt ist; oder nicht gehörig conisch in eine sehr kleine Kugelfläche zulauft; oder sich Unreinigkeiten in dem Hütgen gesammlet haben. —

Uebrigens lese man in Herrn von Oppels Markscheidekunst 433 u. f. §.; auch Herrn Pr. Mayers pract. Geom. 120 §.

§. 101.

1) Wenn der Hängecompaß an die Schnur gehangen wird; so muß die seigere Ebne durch sie mit der der Zwölftenstundenlinie zusammen fallen. Geschieht dieß nicht, so können die Haken verbogen, oder der breite Ring, woran sich die Haken befin-

befinden, nicht gehörig angebracht seyn, und man erhält allemal ein anderes Streichen.

II) Um nur zu zeigen, daß ein solcher Fehler eben nicht ausser Acht zu lassen ist, will ich annehmen, die seigere Ebne der Schnur gehe durch des Compasses Mittelpunct C, (Fig. XVII); und schneide also die söhlige Ebne, NaSbN, des Stundenringes, in der durch C gehenden Linie. Es sey NS die Zwölfstundenlinie; so ist NCa, = bCS, der Winkel den der Schnur seigern Ebne mit der der Zwölftenstundenlinie macht (Geom. II. Th. 2. Erkl.), oder um den erstere Ebne von lezterer abweicht.

Dieser Winkel muß also gesucht werden. Er heiße α.

Nun wird wohl Na nicht so beträchtlich groß seyn, und daher als gerade, und das Δ NCa als gleichschenklicht angenommen werden können.

In dieser Voraussetzung hat man, wenn man des Stundenringes Halbmesser

oder $Ca = a$, und

$Na = c$

sezt,

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \frac{c}{2a};$$

Und, weil α klein, also $\frac{1}{2}\alpha$ noch kleiner; so erhält man ohne merklichen Irrthum

$$\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{c}{2a}$$

also

$$\alpha = \frac{c}{a}$$

in Decimaltheilen des Halbmessers = 1.

III) Will man α in Sekunden haben, so überlege man, daß die halbe Peripherie eines Kreises

$$= 180 . 60 . 60 = 648000''$$

enthält:

Nun heiße die gesuchte Anzahl Sekunden x; so hat man

$$3,1415\ldots : \alpha = 648000'' : x''$$

also

$$x = \frac{648000}{3,1415\ldots} . \alpha \text{ Sek.}$$

$$= \alpha . 206264.$$

IV) Folglich x oder α in Sekunden

$$= \frac{c}{a} . 206264.$$

Exempel.

Es sey

$$c = 0,01 \text{ Zoll}$$
$$b = 2 \text{ Zoll}$$

so ist

$$\alpha = \frac{0,01}{2} . 206264''$$
$$= 0,01 . 103132''$$
$$= 1031'',32$$
$$= 17' 11'',32$$

Für

$c = 0,1$ Zoll

bekommt man

$$\alpha = 10313'',2$$
$$= 2^\circ\ 51'\ 53'',2$$

Im leztern Falle giebt also die Nadel allemal einen Winkel an, der um $2^\circ\ 52'\ 53'',2$ zu groß oder zu klein ist, nachdem die Zwölftestundenlinie und das nordliche Ende auf einer Seite der Schnur seigern Ebne, oder auf verschiedenen, liegen.

V.
Findung des reducirten Streichens.

§. 102.
Aufgabe.

Es ist die Magnetabweichung (51)' = d, und einer Linie observirte Streichen = β, bekannt;

Man soll ihr reducirtes Streichen, γ, finden.

Auflösung.
1) Für östliche Abweichung.

I) Wenn das observirte Streichen östlich und $< $, als die Ergänzung der Magnetabweichung zu 2 R, oder $< 2\,R - d$, ist

$$\gamma = \beta + d$$

und östlich.

II) Ist ijt genanntes Streichen $> 2\,R - d$;

So

So hat man

$$\gamma = d + \beta - 2R$$

und westlich

III) Wenn das gegebene observirte Streichen westlich und $< 2R - d$.

Hier hat man auch (wie I)

$$\gamma = \beta + d$$

aber westlich

IV) Für ein westlich observirtes Streichen $> 2R - d$ erhält man (wie II)

$$\gamma = \beta + d - 2R$$

aber östlich.

V) Exempel.

Es sey

$$d = 1^h\,\tfrac{3}{4} = 16^\circ\,24'\,22'',5$$

östlich, und

$$\beta = 11^h\,2\,\tfrac{1}{4} = 169^\circ\,13'\,7'',5$$

westlich, so ist

$$\beta > 2R - d,$$

oder

$$\beta^h > 12 \text{ Stunden} - d^h$$

und daher wird γ nach (IV) gefunden. Also

$$\gamma = 11^h\,2\,\tfrac{1}{4} + 1^h\,\tfrac{3}{4} - 12^h$$
$$= 11^h\,1\,\tfrac{1}{4} - 10^h\,7\,\tfrac{1}{4}$$
$$= 0^h\,3$$

östlich. In Graden findet man

$$\gamma = 16^\circ\,24'\,22'',5 + 169^\circ\,13'\,7'',5 - 180^\circ$$
$$= 16^\circ\,24'\,22'',5 - 10^\circ\,46'\,52'',5$$
$$= 5^\circ\,37'\,30''.$$

Beweis.

Für I.

VI) Es sey (Fig. XVIII) NS die Mittagslinie, nf die Zwölftestundenlinie, und CN, cn, die nördlichen Theile;

So ist der Winkel NCn die östliche Magnetabweichung (51), also = d und folglich nCS = 2 R — d = 12 St. — d^h; ferner NCB der Linie CB östliches reducirtes und nCB östliches observirtes, Streichen (64).

So lange nun nCB < nCS oder nCB < 2 R — d; so lange ist

$$NCB = NCn + nCB.$$

Für II.

Wird aber nCB > nCS, daß also CB zwischen Cf und CS, in CB′ zu liegen kommt;

So ist der Linie CB′ östliches observirtes Streichen = nCB, ihr reducirtes hingegen = B′CS, und westlich (64).

Aber

$$nCB' + B'Cf = 2\,R = 12\,St.$$

und

$$B'Cf = SCf - B'CS = NCn - B'CS$$

Also

$$2\,R = nCB' + NCn - B'CS$$

oder

$$2\,R + B'CS = nCB' + NCn$$

Also

Also

$$B'CS = nCB' + NCn - 2R$$

Für III, IV.

Erhellet, wenn man mit cb, CB″ ähnliche Betrachtungen wie mit CB, CB′ anstellt.

2) Für westliche Magnetabweichung.

VII) Wenn das observirte Streichen östlich und $< d$. Da ist

$$\gamma = 2R + \beta - d.$$

und westlich.

VIII) Ist es aber $> d$;

So hat man

$$\gamma = \beta - d.$$

und östlich.

IX) Wenn das observirte Streichen westlich und $! < d$.

Hier hat man auch

$$\gamma = 2R + \beta - d$$

aber östlich.

X) Ist es aber $> d$

So bekommt man, (wie VIII)

$$\gamma = \beta - d$$

aber westlich.

Exempel.

XI) Wenn β wie in (V), desgleichen auch d der Größe nach, sonst aber westlich; so erhält man nach (VIII) hier auch

$$\gamma = 0^h\ 3$$

aber westlich.

Beweis.

Für VII.

In der XVIII. Figur haben einerley Buchstaben einerley Bedeutung mit den in der XVII. Figur.

Es ist also nCN die westliche Magnetabweichung (51), also = d; BCS der Linie CB reducirtes Streichen und westlich, aber nCN dieser Linie observirtes Streichen und östlich (64) und < d.

Nun ist

$$BCN + BCS = 2\,R$$

und

$$BCN = nCN - nCB$$
$$= d - nCB$$

Also

$$2\,R = d - nCB + BCS$$

Folglich

$$2\,R + nCB - d = BCS.$$

Für VIII.

Hier habe CB die Lage CB′; so ist NCB′ der CB′ östliches reducirtes Streichen, und nCB′ izt genannter Linie östliches observirtes Streichen (64); auch, wie vorhin, nCN die westliche Magnetabweichung aber < nCB′.

Nun ist

$$NCB' = nCB' - nCN$$

Also

$$= nCB' - d.$$

Für IX, X.

Erhellet auf ähnliche Art, wie für VII, und VIII.

VI.

Findung söhliger Winkel oder solcher die zwo sohlige Linien einschliessen.

§. 103.

Lehrsatz.

I) Wenn zwo söhlige Linien Cb, Ca (Fig. XXI, XX) die in einem Puncte C zusammentreffen, zugleich östliches, oder westliches, entweder beyde reducirtes oder observirtes Streichen haben;

So erhält man den Winkel, bCa, den beyde Linien, oder die durch sie gehenden seigern Ebnen einschliessen, **wenn man das grösßere Streichen von dem kleinern abzieht.**

II) Hat aber die eine beyder Linien östliches, die andere westliches, beyde aber entweder zugleich observirtes oder reducirtes Streichen:

So findet man genannten Winkel bCa, **wenn man zu dem kleinern Streichen 12 Stunden oder 180° addirt, und von dieser Summe das grösßere abzieht.**

Beweis.

Für I.

In der XX, XXI Figur sey SN die Zwölfstunden- oder Mittagslinie, und CN ihr nördlicher Theil:

So ist in der XX. Fig. der Linie Cb Streichen NCb und der Linie CA ihres NCA, östlich, aber

in

in der XXI. Figur ist jener Streichen SCb, und dieser ihres SCa, und beydes westlich (64).

Nun ist (Fig. XX)

$$NCb < NCa;$$

Aber

$$bCa = NCa' - NCb$$

Ferner: in der XXI. Fig. ist

$$SCb > SCa$$

und

$$aCb = bCS - aCS.$$

Für II.

In der XXII. Figur haben einerley Buchstaben einerley Bedeutung mit den in der XX. oder XXI; überdieß sey WO die Sechsstestundenlinie.

So ist NCb der Linie Cb östliches Streichen, und SCa das westliche der Linie Ca.

Nun sey $SCa > NCb$;

So wird

$$aCN + NCb = (12\ St. - SCa) + NCb$$
$$= 12\ St. - SCa + NCb$$
$$= 12\ St. + NCb - SCa.$$

Aber

$$aCN + NCb = aCb$$

Folglich

$$aCb = 12\ St. + NCb - SCa.$$

Eben so erhellet der Satz, wenn auch Cb westliches und Ca östliches Streichen hat, auch aCS $<$ NCb ist.

Uebri-

Uebrigens ist noch folgendes zu bemerken:

So lange a und b über der Sechsstestundenlinie WO, nach N zu liegen, und einer von den beyden Puncten a, und b auf WO und der andere über WO liegt; so lange ist SCa > NCb;

So bald aber a und b unter WO nach S zu, zu liegen kommt; so bald wird SCa < NCb.

Schon ist SCa < NCb, wenn a auf oder unter WO, und b über oder auf WO, liegt.

I. Exempel.

Es sey der Linie Cb Streichen
$= 4^h\ 5\ \frac{1}{2}$ östlich,
und das der Linie Ca
$= 7^h\ 2\ \frac{3}{4}$ östlich
So ist

$$bCa = 7^h\ 2\ \frac{3}{4} - 5^h\ 5\ \frac{1}{2}$$
$$= 2^h\ 5\ \frac{1}{4}$$

II. Exempel.

Wäre das Streichen der Linie Ca
$7^h\ 2\ \frac{3}{4}$ westlich
So hätte man

$$bCa = 12^h + 4^h\ 5\ \frac{1}{2} - 7^h\ 2\ \frac{3}{4}$$
$$= 16^h\ 5\ \frac{1}{2} - 7^h\ 2\ \frac{3}{4}$$
$$= 9^h\ 2\ \frac{3}{4}.$$

§. 104.

Zusatz.

1) Wenn (Fig. XXI) der Winkel aCS = n Stun-

den

den und der Winkel bCS = m Stunden (wo m > n und n, m jede Zahlen seyn können) enthält:

So ist

$$aCb = (m - n) \text{ Stunden}$$

Aber nach dem 94. §. ist der Linie Ca westliches Streichen $= -(12^h - m^h)$ und das der Linie $Cb = -(12^h - n^h)$.

Nun sey

$$-(12^h - m^h) = -\mu^h$$

und

$$-(12^h - n^h) = -\nu^h;$$

So enthält μ weniger Einheiten als ν, und daher ist

$$-\mu^h > -\nu^h$$

weil man von einem Paare verneinter Größen die für die größte schätzt, der zum Nichts am wenigsten fehlt, wie dem Ausdrucke: daß eine verneinte Größe weniger als Nichts, (Ar. I. 95) gemäß ist.

Also ist auch

$$aCb = -\mu^h - (-\nu^h).$$

Ferner ist in der XVI. Figur

$$aCb = aCN + NCb$$

Aber NCb ist der Linie Cb östliches Streichen; und dieß sey $= +\Phi^h$; überdem ist $NCa = (12^h - n^h) = -\nu^h$ (I, und 94): Also

$$aCb = -\nu^h + \Phi^h$$
$$= +\Phi^h - \nu^h$$

wo $\Phi > -\nu$, weil man ebenfalls jede negative Zahl kleiner als jede positive ansehen kann (III).

Man kann aber so $aCb > 2R$ oder 12 St. finden:

Denn

Denn wenn Ca unter bb' in Ca' liegt; so giebt a'CN + NCb oder + Φ^h — ν^h, den erhabenen Winkel a'Cb; will man den Hohlwinkel haben; so muß man Φ^h — ν^h von 4 R oder 24 Stunden abziehen.

Dieß erfolgt, wie man leicht sieht, allemal, wenn 12^h — n^h oder $\nu^h > 12^h$ — Φ^h.

IIII) Wenn also beyde Linien Ca, Cb westliches oder die eine östliches und die andere westliches Streichen haben:

So findet man aCb allemal, wenn man die kleinere Anzahl von Stunden, von der größern abzieht; vorausgesezt, daß man sich der Bezeichnung des 94. §. bediene.

Eben das gilt auch, wenn beyde Linien östlich streichen, wie aus dem ersten Theile des Beweises im vorigen §. erhellet.

V) Hiedurch nun lassen sich des vorigen §. zwo Sätze in folgenden einzigen bringen:

Wenn zwoer söhligen Linien Streichen nach des 94. §. Grundenbezeichnung gegeben sind: So erhält man den Winkel den diese beyde Linien, oder die durch sie laufenden seigern Ebnen, mit einander machen, wenn man von der größern Anzahl der gegebenen Stunden die kleinere abzieht.

Käme auf die Art ein Winkel > 12 Stunden; so wird man sich (III) erinnern.

VI)

VI) Exempel.

Der einen söhligen Linie Streichen sey

$$= - 5^h\ 2$$

und der andern ihres

$$= - 8^h\ 3.$$

So bekommt man den gesuchten Winkel

$$= - 5^h - (- 8^h\ 3)$$
$$= - 5^h\ 2 + 8^h\ 3$$
$$= 3^h\ 2. \text{ (III)}$$

§. 105.

Zusatz.

I) Wenn in der XX. Figur NCb, der Linie Cb östliches Streichen bekannt, und bCa; so ist der Cb zur Rechten liegenden Linie östliches Streichen, (61)

$$NCa = NCb + bCa.$$

So lange nun $bCa < bCS$ oder $< 2R - NCb$, so lange ist $NCa < 12$ St.

Wird aber $bCa > bCS$, daß also Ca auf die westliche Seite von SN, in Ca, fällt: So giebt $NCb + bCa'$ dem erhabnen Winkel $NCa' = 2R + SCa'$, wo SCa' der Ca' westliches Streichen ist (64); Also ist

$$NCb + bCa' = 2R + SCa'$$

folglich

$$NCb + bCa' - 2R = SCa'.$$

II) Ist in der XXI. Figur ausser aCb der Winkel oder der Linie Ca westliches Streichen bekannt: So ist auch der Ca' rechter Hand liegenden Linie Cb westliches Streichen oder

bCS

$$bCS = SCa + aCb.$$

Kommt Cb in die Lage wie Cb′; so erhält sie östliches Streichen NCb′: Aber

$$2\,R + NCb' = b'Ca + aCS$$

Also:

$$NCb' = b'Ca + aCS - 2\,R.$$

III) Wenn also der Winkel, bCa, den zwo söhlige Linien Cb, Ca einschliessen, gegeben ist, überdieß das Streichen und dessen Beschaffenheit der einen dieser Linie Cb die der andern Ca zur Rechten liegt:

So erhält man dieser andern Linie, Ca, Streichen, wenn man den gegebenen Winkel zu dem gegebenen Streichen addirt.

Die Summe ist entweder kleiner oder grösser als 2 R oder 12 Stunden. Im ersten Falle ist sie selbst das gesuchte Streichen, und zwar östlich oder westlich, nachdem das gegebene Streichen östlich oder westlich; Im zweyten Falle muß man von ihr 2 R oder 12 Stunden abziehen: der Rest ist das verlangte Streichen, und zwar östlich oder westlich, nachdem das gegebene Streichen westlich oder östlich.

Exempel.

Es sey

$$bCa = 9^h\,3$$

und das Streichen der Linie Cb

$$= 7^h\,5 \text{ östlich};$$

So erhält man der Cb ihres

$$= 9^h\,3 + 7^h\,5 - 12\text{ St.}$$
$$= 17^h - 12\text{ St.}$$
$$= 5^h,$$

und westlich.

IV) Wäre (Fig. XX) der Linie Ca östliches Streichen NCa bekannt und der Winkel bCa, daß also NCa ▷ bCa: So ist der Ca zur linken liegenden Linie Cb Streichen, oder

$$NCb = NCa - bCa.$$

Käme aber Cb in eine Lage wie Cα, so erhält sie westliches Streichen βCS, und βCA ▷ NCa. Aber

$$\beta CS = 2\,R - \beta CN,$$

und

$$\beta CN = \beta Ca - NCa;$$

Also

$$\beta CS = 2\,R - \beta Ca + NCa$$
$$= 2\,R + NCa - \beta Ca.$$

V) Ist in der XXI. Figur ausser den Winkel aCb der Linie Cb westliches Streichen SCb bekannt, und SCb ▷ aCb: So ist der Cb zur linken liegende Linie Ca westliches Streichen oder

$$SCa = SCb - aCb:$$

Kommt Ca in eine Lage wie Ca′, so erhält sie östliches Streichen a′CN (64), und a′Cb ▷ SCb.

Nun ist

$$NCa' = 2\,R - a'CS$$

Aber

Aber

$$a'CS = a'Cb - SCb;$$

Also

$$NCa' = 2R + SCb - aCb.$$

VI) Wenn also ausser dem Winkel bCa, den zwo söhlige Linien Ca, Cb mit einander machen, das Streichen und dessen Beschaffenheit dieser Linien, die der andern zur Linken liegt, gegeben ist.

So findet sich das Streichen der andern, wenn man den gegebenen Winkel von dem gegebenen Streichen abzieht.

Die Differenz ist entweder positiv oder negativ, nachdem nämlich der gegebene Winkel kleiner oder größer als das gegebene Streichen.

Im ersten Falle ist sie selbst das verlangte Streichen, und zwar östlich oder westlich, nachdem das gegebene östlich oder westlich; Im zweyten Falle, muß man sie von 2 R oder 12 Stunden abziehen: der Rest ist das gesuchte Streichen, und zwar östlich oder westlich, nachdem das gegebene westlich oder östlich.

§. 106.

Anmerkung.

Was im vorigen §. (III, VI) von söhligen Linien gesagt worden, gilt auch von den durch sie lau-

fenden seigern Ebnen, und von jeder in diesen Ebnen liegenden schiefen Linie (18).

§. 107.

Aufgabe.

Den Winkel ACB (Fig. XXIII.) von gezogenen Schnüren CB, CA anzugeben, wenn man Stücken Ca, Cb seiner Schenkel, aus dessen Spitze C, messen kann.

Auflösung.

I. Man messe auf den Schnüren aus des Winkels Spitze Stücken Ca, Cb desgleichen die Sehne ba so genau als möglich.

Auf die Art erhält man die drey Seiten eines Dreyecks aCb, wodurch man nach eb. Tr. 20. S. den Winkel C, finden kann.

II. Diese Linien genau zu messen, könnte man sich des Lachterstabes bedienen, auf dem aber, die ganzen oder halben Achtellachter in 1000 gleiche Theile getheilt seyn müßten.

Braucht man die Lachterkette, so muß man auf gutem Holz oder Messing ein Achtellachter, oder halbes Achtellachter in 1000 Theile getheilt, bey sich führen.

III. Da auf des Winkels C Schenkel die Stücken Ca, Cb willkührlich genommen werden können; so ist es vortheilhaft, jedes zehn Achtellachter lang zu machen, die Sehne auch mit Achtellachtern und Tausendtheilen des Achtellachters zu messen.

Darf

Darf man nicht so lange Stücken nehmen, so könnte man jedes fünf Achtellachter machen, und bey Abmessung der Sehne sich der ganzen und der halben Achtellachter in Tausendtheile getheilt, bedienen.

Dieß räth Herr Hofr. Kästner (Markscheidekunst 11. Anm.)

IV) Durch jedes dieser Verfahren (III) erhält man des Dreyecks aCb gleiche Schenkel, jeden 10000, und die Grundlinie ba in Zehntausendtheilen.

V) Man findet aber ba nur in Tausendtheilen (II), wenn man jeden des Dreyecks aCb Schenkeln nicht einmal fünf Achtellachter lang nehmen darf, welches dem Markscheider oft begegnet.

VI) Wenn man Ca = Cb nimmt; so ist ab die Sehne des Winkels für den Halbmesser Ca. Also $\frac{1}{2}$ ab der Sinus für genannten Halbmesser.

Hat man nun diesen = 10000 (IV); so erhält man C,

Wenn man die gemessene Sehne ab halbirt;

Diese Hälfte als einen Sinus für den Sinus-totus = 10000 ansieht;

Das ist, unter den Sinussen wie sie in den gewöhnlichen Tafeln für den Halbmesser zehn Millionen stehen, den aufsucht, dessen höchste Ziffern, die drey niedrigsten abgeschnitten, dieser Hälfte am nächsten kommen.

Der Winkel, der diesem Sinus zugehört, verdoppelt, giebt den gesuchten.

VII) Kann man das Verfahren (III) nicht anbringen: So läßt sich doch allemal Ca = Cb machen.

In diesem Falle findet sich der Winkel C nach eb. Tr. 8. S. I.

Es ist nämlich

$$\sin \tfrac{1}{2} C = \frac{r \cdot \frac{1}{2} ab}{Ca}.$$

VIII. Exempel, für VI. *)

Für

$$Ca = Cb = 10000,$$

sey

$$ab = 11387;$$

so ist

$$\tfrac{1}{2} ab = 5693,5$$

Aber

$$\sin 34° 42' = 5692795$$
$$\sin 34° 43' = 5695186.$$

Wenn man von jeden dieser Sinusse die drey niedrigsten Ziffern abschneidet: so fällt die halbe Sehne zwischen beyde, und ziemlich nahe an der kleinern.

Man nehme also seinen Winkel für des gesuchten Hälfte an: so ist der gesuchte

$$C = 69° 24'$$

VIII.

*) Aus Kästners Markscheidek. 11. Anm. 18.

VIII. So lange man den halben Winkel kleiner als 75° findet; so lange hat man ihn innerhalb einer Minute, folglich den ganzen innerhalb zwo Minuten; weil, (wie die trigonometrischen Tafeln zeigen) bis so weit die Sinus sich in Zehntausendtheilgen des Sinus totus ändern, indem sich die Bogen um einzelne Minuten ändern.

Ueberdieß sieht man leicht, welcher der beyden Minuten, zwischen die er fällt, der halbe Winkel am nächsten liegt, und also, welcher seiner Gränzen der Ganze am nächsten seyn wird.

IX. Fände man den halben Winkel > 75°: so hätte man ihn mit einer Ungewißheit von 2 und mehrere Minuten; folglich den ganzen mit doppelt so vieler.

X. Man muß daher solche Winkel so viel als möglich zu vermeiden suchen, oder den stumpfen durch eine, genau in seiner Ebne gezogne, Schnur theilen, und jeden einzeln finden.

Stumpfe Winkel, besonders große, hat man auch in alle den Fällen, zu entgehen, wo man auf des Winkels Schenkel nicht so große Stücken nehmen darf (V), wie (III) erfodert.

XI. Hätte man das ganze oder halbe Achtellachter (III) nur in Hunderttheile getheilt; so erhielte man die Sehne des ganzen Winkels oder den Sinus des halben, nur in Tausendtheilen des Sinus totus.

Solche Sinusse finden sich aus den Tafeln, wenn man daselbst von jedem die vier niedrigsten Ziffern abschneidet (eb. Tr. 1, S.).

Man erhält aber dadurch den halben Winkel, wenn er über 10 Grad beträgt, um 2 bis 3 Minuten zu groß oder zu klein, und also den Ganzen um 4 bis 6 Minuten. Allemal genauer als sich der Markscheider sonst gefallen läßt. Doch bey ziemlich stumpfen Winkeln würde man einen Fehler von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Grade begehen. Diese kann man aber vermeiden, oder theilen, oder **versuchen**, ihre **Nebenwinkel zu messen.**

XII. Wer eine Sehnentafel für den Halbmesser zehntausend hat, darf nur, um den ganzen Winkel gleich selbst zu finden, die gemessene Sehne (III) darinne aufsuchen, oder die die ihr am nächsten kommt. Der dabey stehende Winkel ist der verlangte.

Eine solche Tafel liesse sich nach eb. Tr. 9. S. für Sehnen von 2 zu 2 Minuten fertigen.

XIII. Den Winkel C zu bestimmen, wenn man nicht aus seiner Spitze messen kann, lernt man in Herrn Hofr. Kästners Markscheidekunst 11. Anm. wonach auch meist das bisherige vorgetragen ist.

Der Markscheider zieht mit Vortheil seine Schnuren meist so, daß man aus C messen kann. Daher habe ich hier nur diesen Fall betrachtet.

§. 108.

Aufgabe.

I. Aus dem Winkel, g, den zwo schiefe Linien einschliessen (107), und ihren Neigungen p, q, den ihnen zugehörigen sphärischen Winkel h, oder den zu finden, der die durch diese Linien laufenden seigern Ebnen mit einander machen, oder, in der Markscheidersprache, den der Schnuren Sohlen begränzen.

Auflösung.

II. Für den Sinustotus = r hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}h=\sqrt{\left(\frac{\sin\tfrac{1}{2}(g+p-q)\sin\tfrac{1}{2}[g-(p-q)].r^2}{\mathrm{Cos}\,p\,\mathrm{Cos}\,q}\right)}$$

Beweis.

III. Diese Aufgabe ist einerley mit der die sich in der sphärischen Trigonometrie 8. Satzes, 33. Erläuterung, in Form eines Beyspiels, findet. Daher die dortige Rechtfertigung auch hier gilt.

Man hat aber daselbst (3,), [die dortige Grössenbezeichnung izt beybehalten]

$$\sin\tfrac{1}{2}E=\sqrt{\left[\frac{\sin\tfrac{1}{2}[b+(a-p)].\sin\tfrac{1}{2}[b-(a-p)].r^2}{\sin a\sin p}\right]}$$

Nun ist

dort	b	a	p	E
hier	g	90° — q	90° — p	h

und

$$a - p = 90° - q - (90° - p)$$
$$= 90° - q - 90° + p$$
$$= p - q$$
$$\sin a = \sin (90° - q)$$
$$= \mathrm{Cof}\, q$$
$$\sin p = (90° - p)$$
$$= \mathrm{Cof}\, p;$$

woraus sich durch gehörige Substitution die angegebene Formel (II) findet.

IV. Sie steht auch in Herrn Hofr. Kästners Markscheidekunst 12. Anm. 42 ꝛc. vorher (41) aber in Worte für den der keine sphärische Trigonometrie kennt.

Das Nöthige was noch hieher gehört, werde ich aus angef. Buche hier kürzlich beybringen.

V. Exempel. Es sey

$$g = 75° 30'$$
$$p = 50° 30'$$
$$q = 23° 30'$$

so ist

$g + (p - q) = 102° 30'$, halb, $= 51° 15''$
$g - (p - q) = 48° 30'$ . . $= 24° 15''$
$\log \sin \frac{1}{2}(g + p - q) = 9,8920303$
$\log \sin \frac{1}{2}[g - (p - q)] = 9,6135446$
$\log r^2 = 2 \log r = 20,$

Summe $= 39,5055749 = M$
$\log \mathrm{Cof}\, p = 9,8035105$
$\log \mathrm{Cof}\, q = 9,9623978$

Summe $19,7659083 = N$

M —

$M - N = 19,7396666.$

Dieß halb genommen ist

$\log \sin \frac{1}{2} h = 9,8698333$, und

giebt $\frac{1}{2} h = 47° 49'$

Also $h = 95° 38'$

h erhält man genauer, wenn man bey $\frac{1}{2}$ h noch Sekunden durch Proportionaltheile (eb. Tr. 12. S.) sucht.

So findet Herr Hofr. Kästner (Markscheidek. a. a. O. 43)

$\frac{1}{2} h = 47° 49' 8''$,

und daher

$h = 95° 38' 16''$

VI. Bisher ist stillschweigend angenommen worden, daß beyde Linien steigen (82).

Steigt die eine und fällt die andere; so ist jener Neigung positiv, oder sie bleibt p, dieser aber negativ, (85) oder $-q$, und $-q$ kann $< p$ geschäzt werden, wenn auch $-q$ mehr Grade enthalten sollte (Ar. l. 95).

VII. Exempel. Der steigenden Linie Neigung sey 12 Gr. 30 Minuten, der fallenden 12 Gr. 30 Minuten, und $g = 50$ Grade:

So ist

$p = 12° 30'$

$q = -(20° 30')$

$p - q = 12° 30' - [-(20° 30')]$

$= 12° 30' + 20° 30'$

$= 33°$

Als

Also

$$g + p - q = 83°, \text{ halb} = 41° 30'$$
$$g - (p - q) = 17°, \text{ halb} = 8° 30'$$

Uebrigens führt sich die Rechnung wie in V, wobey man sich aber erinnern muß, daß eines verneinten Winkels Cosinus, einerley mit des bejahten sonst gleichen Winkels seinen.

VIII. Wenn beyde Linien fallen, so sind ihre Neigungswinkel verneint (85), wo der, — p, am größten geschäzt wird der die wenigsten Grade enthält (Ar. I, 95).

IV. Exempel. Fällt also die eine Schnur

27 Gr. 30 Min.

und die andere

43 Gr. 15 Min.

so hat man in (II)

$$p = - (27° 30')$$
$$= - (27° + 30')$$
$$= - 27° - 30'$$

und eben so

$$q = - 43° - 15'$$

Also

$$p - q = + 16° - 15' \text{ (Ar. I, 98)}$$
$$= 15° + 60' - 15'$$
$$= 15° + 45'$$

Ist nun

$$g = 50° 20';$$

so hat man

$$g + (p - q) = 66° 5', \text{ halb } 33° 2' 30''$$

q —

$q - (p - q) = 34° 35'$ halb $17° 17' 30''$

Wenn man hier die Sekunden nicht weglassen will, ist es leicht die Logarithmen der Sinusse der halben Winkel durch Proportionaltheile zu finden, weil man nur den Unterschied der beyden nächsten Logarithmen, zwischen die ein solcher Logarithme fallen muß, halbiren darf (eb. Tr. 12. S.)

Uebrigens wird die Rechnung wie in V geführt, nur muß man sich des 4. Zus. der eb. Tr. 3. Erkl. erinnern.

X. Steigt die eine Linie, und die andere ist söhlig: so darf man nur (in II) dieser Neigungswinkel, q, $= 0$ setzen.

XI. Fällt eine Linie z. E. $12°$, und die andere ist söhlig: so ist jener Neigung negativ, und dieser $= 0$; Aber erstere ist kleiner als leztere (Ar. I, 95): Also darf man nur in (II), $p = 0$, und $q = -12°$ setzen: daher hat man

$$p - q = 0 - (-12°)$$
$$= +12°$$

Uebrigens führt sich die Rechnung wie in V, wobey man sich erinnern muß, daß $\text{Cos}\, 0 = r$.

XII. Aus den bisherigen (VI . . . . XI) sieht man, daß in der Formel (II) fünf Fälle, alle, die bey zwo Linien in Ansehung ihrer Neigung vorkommen, enthalten sind, wenn man nur die bejahten und verneinten Größen, gehörig braucht.

XIII. Uebrigens ist hier noch zu erinnern, daß die Größen p, q und g so genau als möglich müssen

sen gemessen werden, weil sonst h mit einen nicht unbeträchtlichen Fehler gefunden wird.

VII.

Sohlen und Seigerteufen.

Anmerkung.

§. 109.

Die Seigerteufe einer Linie AB, oder deren Endpunct B wollen wir durch

Sg. AB, oder Sg. B

und ihre Sohle durch

S. AB; oder S. B

bezeichnen.

§. 110.

Aufgabe.

Die Größe der Linie AB = l und ihre Neigung = α ist gegeben:

Man verlangt ihre Seigerteufe und Sohle.

Auflösung.

Für den Sinus totus = r hat man

$$\left.\begin{aligned} \text{Sg. AB} &= l \cdot \sin \alpha \\ \text{S. AB} &= l \cdot \text{Cos } \alpha \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

oder

$$\begin{aligned} \log \text{Sg. AB} &= \log l + \log \sin \alpha \\ \log \text{S. AB} &= \log l + \log \text{Cos } \alpha \end{aligned}$$

Exempel.

Es sey (Opp. Markscheidek. §. 672)

l =

$1 = 28\frac{5}{8}$ Kr. $9\frac{1}{2}$ Zoll
$= 229,95$ Achtellr. (34, IV.)
$a = 69° 25'$

So hat man

$\log 229,95 = 2,3616334$
$\log \sin 69° 25' = 0,9713509 - 1$ (eb. Tr. 19. S. Vor.)

$\log$ Sg. $AB = 2,3329843.$
Giebt Sg. $AB = 215,17$ Achtlr.
$= 26$ Kr. 7, 27 Achtlr.
$= 26\frac{7}{8}$ Kr. 2 Zolle 7 Pr.

Ferner:

$\log 229,95 = 2,3616334$
$\log \text{Cof } 69° 25' = 0,5460110 - 1$

$\log$ S. $AB = 1,9076444;$
Giebt S. $AB = 80,843$ Achtlr.
$= 10$ Kr. 843 Achtlr.
$= 10$ Kr. 8 Zoll 43 Pr.

Kürzer läßt sich die Rechnung so darstellen:

$\log 229,95 = 2,3616334$
$\sin 69° 25' = 0,9713509 - 1$
Cof $0,5460110 - 1$

Sg. $= 2,3329843$; 215, 17 Achtlr. $=$ 26 Kr. 7, 27 A.

S. $= 1,9076444$; 80, 843 A. $=$ 10 Kr. 0, 843 A.

Zu

Zu dieser Rechnung habe ich mich der größern logarithmischen Tafeln, bedient. Aus den gemeinen findet man die Linien in einer Decimalziffer weniger.

§. III.

Anmerkungen.

I. Den Markscheidern hat es beschwerlich geschienen, allemal nach vorigen §. Sohle und Seigerteufe für jedes gegebene l und α zu berechnen.

Es sind daher die so genannten und den Markscheidern so bekannten **Sohlen- und Seigerteufentafeln** verfertiget worden; deren Berechnung eigentlich auf vorigen §. beruhet.

II. Aber da für ein gegebenes α und $l = p + q + r \ldots$ die

$$Sg. = p \sin\alpha + q \sin\alpha + r \sin\alpha + \ldots$$

und

$$S. = p \operatorname{Cos}\alpha + q \operatorname{Cos}\alpha = r \operatorname{Cos}\alpha + \ldots$$

So ist es nicht nöthig die Sohle und Seigerteufe jedes l in die Tafeln zu bringen, sondern es ist genug solche für Theile die l ausmachen, darinne zu finden.

Daher kommt es, daß z. E. die Oppelischen Tafeln für l von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4, 5 Lachterzoll; $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{8}$, 1, 2, 3, 4, 5, 10 Lachter, die Sohlen und Seigerteufen und zwar von 5′ zu 5′ durch alle 90 Grade berechnet, enthalten.

III. Da

$\sin(45° - \alpha) = \text{Cof}(45° + \alpha)$ (eb. Tr. 3. Erkl.)

$\text{Cof}(45° - \alpha) = \sin(45° + \alpha)$ (eb. Tr. 3. Erkl.)

So ist

$$\text{l. } \sin(45° - \alpha) = \text{l. Cof}(45° + \alpha)$$
$$\text{l. Cof}(45° - \alpha) = \text{l. } \sin(45° + \alpha).$$

Daher hat man nur die Sohlen und Seigerteufen für die ersten 45° zu berechnen gebraucht, und man hat sie dann alle gehabt.

Diesem gemäß haben die Tafeln (I) folgende Einrichtung erhalten.

IV. Linker Hand in einer schmalen Columne stehen die Neigungswinkel, welche bis 90 Grade in den meisten Tafeln durch alle viertheils, in den Oppelischen aber durch alle zwölftheils Grade, wachsen.

V) In einer schmalen Columne rechter Hand, stehen Neigungswinkel deren jeder mit dem (IIII) welcher sich mit ihm in einer Zeile befindet, 90° macht.

Diese Donlegen rechter Hand, wachsen also vom Ende bis an den Anfang der Tafeln.

VI. Zwischen diesen Columnen befinden sich welche überschrieben mit Zahlen die Lachter und dessen Theile anzeigen.

Z. E. die Oppelische Ueberschrift ist die in (II); die Weidlerische: $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$; 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20,

wovon die acht lezten Zahlen ganze Lachter, die ersten viere aber, Theile des Lachters, bedeuten.

VII. In jeder solcher Columne nun (VII) stehen für die in der Ueberschrift angezeigten wahren Abstände (16), Seigerteufen, die, den Donlegen, bey einigen Tafeln in der linken Seitencolumne, bey einigen in der rechten, zugehören; oder Sohlen, die den Neigungen, bey jenen Tafeln in der rechten Seitencolumne bey diesen in der linken zu kommen (III).

VIII. Will man also Seigerteufen wissen, so sucht man die Donlegen linker oder rechter Hand (VII), bey Sohlen aber zur rechten oder linken (VII).

IX. Diese Sohlen und Seigerteufen sind bey einigen nur bis auf Zehntheile, bey andern aber, wie in den Oppelischen auf 100 Theile von Lachterzollen angegeben.

Ueberhaupt sind in den Oppelischen Tafeln die Sohlen und Seigerteufen in Zollen und deren Hunderttheilen ausgedruckt, welches bey andern bekannten nicht geschehen ist. Das Oppelische Verfahren aber ist besser, wie man leicht übersieht.

X. Dieß ist die wesentliche Einrichtung der Sohlen- und Seigerteufentafeln. Mehreres von ihnen findet man in Herrn Hofr. Kästners Markscheidek. 10. Anm. u. a.

Unter den bisher bekannten Sohlen- und Seigerteufentafeln, sind die Oppelischen die besten.

Man

Man findet sie auch in Böhmens Feldmeßkunst S. 289 u. f. aber nur von 15′ zu 15′ und die beyden Columnen $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ Zoll (VI) weggelassen.

Die Oppelischen Tafeln werden von den die der **Herr Bergmeister Scheidhauer** berechnet hat, weit übertroffen.

Man hat bey diesen die Sohlen und Seigerteufen für wahre, in 8 und 10 theilichtes Lachtermaaß ausgedruckte Abstände neben einander beysammen; Sie sind für leztere auf fünf Decimalstellen des Lachters, für erstere aber auf viere, gerechnet.

XI. Den Gebrauch solcher Tafeln nach den Oppelischen zu zeigen, (oder (VIII) zu erweitern) mag das Exempel in 110. §. dienen.

XII. Um nach genannten Tafeln also die Seigerteufe für $28\frac{5}{8}$ Lachter $9\frac{1}{2}$ Zoll und 69° 25′ zu finden, sucht man darinne die gegebenen 69° 25′ in der Columne (IV, V) auf, wo Seigerteufe beygeschrieben steht, und merket auf welche Zeile sich diese finden.

XIII. Hierauf zerlegt man die gegebenen $28\frac{5}{8}$ Lachter $9\frac{1}{2}$ Zoll in solche Theile, deren Seigerteufen in den Tafeln stehen (II); Das ist in (10 + 10 + 4 + 4 + $\frac{4}{8}$ + $\frac{1}{8}$) Lachter + (5 + 4 + $\frac{2}{4}$) Zoll.

XIV. Nun nimmt man für diese Theile aus der gefundenen Zeile (XII) die einzelne Seigerteufe, und macht ihre Summe.

Die Rechnung ist folgende

Lachter	10	geben	748, 93	Zolle
	10	=	748. 93	=
	4	=	299, 57	=
	4	=	299, 57	=
	4/8	=	37, 44	=
	1/8	=	9, 36	=
Zolle	5	geben	4, 68	
	4		3, 74	
	2/4		0, 47	

Seigert. 2152, 69 Zolle
= 26 7/8 Lachter 2, 69 Zoll.

Im Exempel des 110. §. ist 26 7/8 Lachter 2, 7 Zoll gefunden worden.

XV. Man sieht daß die Rechnung im 110. §. eben so kurz, wo nicht kürzer, ist. Dieß wird man allemal so finden. Zum Beyspiele mag noch folgendes dienen.

Für 13 5/8 Lachter und 34° die Seigerteufe zu suchen.

XVI. Nach den Oppelischen Tafeln:

Lachter	10	geben	447, 35 Zoll
	3		134, 21
	4/8		22, 37
	1/8		5, 59

Sgt. 609, 52 Zolle
= 60, 952 Achtellr.

XVII.

XVII. Nach dem 110. §.

log 109 = 2, 0374265
· sin 34° = 0, 7475617 — 1

1, 7849882
Giebt Sg. = 60, 952. Achtellr.

XVIII. Auch die Rechnung in XVII ist eben so kurz als die in XVI; wiewohl daselbst die Seigerteufe nur aus 4 Gliedern zusammengesezt wurde.

XIX. Nach der Rechnung in XVI, XIV, findet man allemal die Seigerteufe gleich selbst, und mittelst des Herrn Bergmeister Scheidhauers Tafeln in zehn und hunderttaufendtheile, des Lachters; Nach der Rechnung, wie in XVII, aber den Logarithmen, den man erst aufsuchen muß. Nach jener Rechnung braucht man zwar nur einmal die Größe aufzusuchen, die man braucht; Nach dieser hingegen muß dieß durch dreymahliges Aufsuchen geschehen.

Indessen werden doch diese Exempel, die sich auch in Kästners Markscheidek. a. O. befinden, Anfängern zeigen, daß sie, wenn sie z. E. die Schulzische Sammlung mathematischer Tafeln besitzen, auch bequem und genau Sohlen und Seigerteufen berechnen können, wenn sie nur mit diesen Tafeln gehörig umzugehen wissen; welches aber nicht von jedem Markscheider verlangt werden kann.

§. 112.

Erklärung.

Einer steigenden Linie Seigerteufe heißt steigend, einer fallenden aber fallend.

§. 113.

Zusatz.

Nach §. 84 und eb. Tr. 3. Erkl. 4. Zusatze sind die steigenden Seigerteufen bejaht, die fallenden aber verneint.

Jene werden wir daher mit + diese mit — bezeichnen.

§. 114.

Zusatz.

Wenn der Linie AB Seigerteufe

$$\pm S$$

ist; so ist der Linie AB ihre

$$\mp S$$

(113; 85).

§. 115.

Aufgabe.

Aus der gegebenen Sohle und Seigerteufe einer Linie AB, ihre Größe l, und Neigung α zu finden.

Auflösung.

1) $l = \sqrt{[(Sg.\ AB)^2 + (S.\ AB)^2]}$

2) $\text{Tang}\ \alpha = \frac{Sg.\ AB}{S.\ AB}$

Beweis.

Für 1)
erhellet die Sache aus dem 16. §. und Geom. 15. S.; für

2) aber, daß nach (110)

$$\frac{\text{Sg. AB}}{\text{Soh. AB}} = \frac{l \sin \alpha}{l \operatorname{Cos} \alpha}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha}$$

§. 116.
Anmerkung.

Die im vorigen §. gefundene Tangente ist, wenn die Seigerteufe fallend, negativ, (113) und gehört in so ferne einen stumpfen Winkel zu (eb. Tr. 4. Erkl. 1. Z.); Sein spitziger Nebenwinkel ist aber der, den der Gradbogen, für der Linie AB negativen Neigung geben wird.

§. 117.
Zusatz.

Wenn von den 4 Größen in 110. §. oder 115. §. zwo bekannt sind, so kann man daraus die übrigen finden.

Daher hat man noch folgende in der Markscheidekunst brauchbare Formeln.

1) $\text{S. AB} = \sqrt{(l^2 - (\text{Sg. AB})^2)}$

2) $\sin \alpha = \frac{\text{Sg. AB}}{l}$

3) $\text{Sg. AB} = \sqrt{(l^2 - (\text{S. AB})^2)}$

$$4)\ \text{Cof}\,\alpha = \frac{\text{S. AB}}{1}$$

$$5)\ 1 = \frac{\text{Sg. AB}}{\text{sin}\,\alpha}$$

$$= \text{Sg. AB Cofec}\,\alpha$$

$$6)\ \text{Soh. AB} = \frac{\text{Sg. AB}}{\text{Tg}\,\alpha}$$

$$= \text{Sg. AB} \times \text{Cot}\,\alpha$$

$$7)\ 1 = \frac{\text{Soh. AB}}{\text{Cof}\,\alpha}$$

$$= \text{S. AB} \times \text{sec}\,\alpha$$

$$8)\ \text{Sg. AB} = \frac{\text{S. AB}}{\text{Cot}\,\alpha}$$

$$= \text{S. AB} \times \text{Tg}\,\alpha$$

§. 118.

Lehrsatz.

Es seyen (Fig. XXIV, XXV) AB, BC, zwo Linien, von den der einen AB Endpunct B mit dem Anfangspuncte der andern BC verbunden ist.

Man ziehe den Anfangspunct A der ersten Linie AB mit dem Endpuncte C der andern BC durch eine gerade Linie AC zusammen:

So ist die Summe der Seigerteufen dieser Linien AB, BC = der Seigerteufe von AC, und die Summe jener Linien Sohlen, = der Sohle der Linie AC.

Beweis.

Man lege durch A, B, söhlige Ebnen; fälle auf sie von B, C die Lothe BD, CF, CE, und ziehe BF, AE;

So ist

BD = Seig. AB	AD = S. AB
CF = Sg. BC	BF = S. BC
CE = Sg. AC	AE = S. AC.

Nun können die Seigerteufen von AB, und BC, entweder

1) beyde steigend, oder
2) beyde fallend, oder
3) die eine steigend und die andere fallend

seyn.

Für 1) ist (Fig. XXIV)

$$CE = CF + FE$$

aber

$$FE = BD \text{ (G. 12. S. 3. Z.)}$$

also

$$CE = CF + BD.$$

Ueberdieß ist

$$AE = AD + DE$$
$$= AD + BF \text{ (G. a. O.)}$$

Für 2) ist CF und BD verneint: also

$$CE = (-BD) + (-CF)$$

und AE bleibt wie für 1)

Für 3) habe AB (XXV. Fig.) die steigende Seigerteufe und BC die fallende:

So ist

$$CE = FE - CF$$
$$= BD - CF \text{ (G. a. D.)}$$
$$= BD + (-CF) \text{ (Ar. I. 96);}$$

AE, bleibt wie vorhin.

§. 118 b.

Aufgabe.

Aus der Linien AB, AC Seigerteufen die der Linie BC zu finden.

Auflösung.

Da

$$\text{Sg. } AB + \text{Sg. } BC = \text{Sg. } AC \text{ (vor. §.)}$$

So ist

$$\text{Sg. } BC = \text{Sg. } AC - \text{Sg. } AB.$$

Oder, weil

$$\text{Sg. } AB = -\text{Sg. } BA \text{ (114)}$$

also

$$-\text{Sg. } AB = +\text{Sg. } BA;$$

so ist auch

$$\text{Sg. } BC = \text{Sg. } AC + \text{Sg. } BA$$

wie es auch nach vorigen §. seyn muß, wenn man die Richtung von B nach A und denn nach C nimmt.

§. 119.

Zusatz.

Es seyen (Fig. XXVI) AB, BC, CD . . . . EF Linien, davon der Endpunct B der ersten AB mit dem Anfangspuncte der andern BC verbunden, diese wieder so mit der dritten, u. s. w.

Zieht man nun den Anfangspunct A der ersten Linie AB, und den Endpunct F der lezten Linie EF durch eine gerade Linie AF zusammen:

So

So ist die Summe der Seigerteufen aller dieser Linien AB, BC ..... EF, = der Seigerteufe von AF, und die Summe ihrer Sohlen = der Sohle von AF (118).

§. 119 b.

Anmerkung.

Bey Summirung der Seigerteufen wird man schon das positive und negative in acht zu nehmen wissen.

VIII.

Länge und Breite (23).

§. 120.

Anmerkung.

Bey dem reducirten Streichen einer Linie AB ist die Länge die söhlige Entfernung des Endpuncts B von der durch ihren Anfangspunct A gehenden Mittagsebne, die Breite aber, die söhlige Entfernung dieses Puncts B, von der durch A laufenden und die Mittagsebne senkrecht scheidende Vertikalfläche, oder der **Aequatorsebne** (45); Bey dem observirten Streichen, werden diese Linien auf die durch A laufende Magnetebne, und die diese daselbst rechtwinklicht schneidende seigere Ebne, die **Magnetäquatorsebne**, bezogen (23).

§. 121.

Anmerkung.

Die Länge einer Linie AB Endpunct B, wollen wir durch

Lg. B, Lg. AB, oder L. B, L. AB

die

die Breite aber durch
B. B oder Br. B, B. AB oder Br. AB
bezeichnen.

§. 122.

Erklärung.

Die Länge heißt östlich oder westlich, die Breite aber nördlich oder südlich, nachdem im ersten Falle, der Punct B auf der Ost- oder Westseite der Magnet- oder Mittagsebne liegt, d. i. nachdem AB östliches oder westliches Streichen hat; im zweyten Falle aber, nachdem der Punct B auf der Nord- oder Südseite der Aequatorsebnen liegt.

§. 123.

Anmerkung.

Oestliche Länge und nördliche Breite, wollen wir als positiv, westliche Länge und südliche Breite aber, als negativ betrachten. (24, 66)

§. 124.

Zusatz.

Wenn also einer Linie AB Länge $\pm$ L und Breite $\pm \lambda$; so ist der BA ihre Länge $\mp$ L und Breite $\mp \lambda$. (123, 65)

§. 125.

Aufgabe.

Einer Linie AB Streichen β und Sohle ist gegeben;

Man sucht ihre Länge und Breite.

Auflö-

Auflösung.

Für den Sinustotus = 1 ist

$$\left.\begin{aligned} \text{Lg. AB} &= \text{S. AB} \times \sin \alpha \\ \text{Br. AB} &= \text{S. AB} \times \text{Cof}\, \alpha \end{aligned}\right\} (25)$$

In Logarithmen hat man

$$\log \text{Lg. AB} = \log \text{S. AB} + \log \sin \alpha$$
$$\log \text{Br. AB} = \log \text{S. AB} + \log \text{Cosin}\, \alpha$$

Exempel.

Es sey

$$\beta = 4^h\ 2$$
$$= 63^\circ\ 45'\ (96)$$
$$\text{S. AB} = 60,952 \text{ Achtellr.}$$

Also

$$\log \sin 4^h\ 2 = 0,6533075 - 1$$
$$\log 60,952 = 1,7849880$$

$$\log \text{Lg. AB} = 1,4382955$$
Giebt Lg. AB = 27,434 Achtellr.
$$= 3 \text{ Lr. } 3,434 \text{ Achtellr.}$$

diese gefundene Länge ist nun positiv oder negativ, nachdem es β ist (122, 123).

§. 126.

Zusatz.

I. Wenn

$$+\beta < R;$$

so ist Lg. AB, und Br. AB positiv; ist aber

$$+\beta > R;$$

so ist Lg. AB positiv und Br. AB negativ.

Für

$$-\beta < R$$

hat man Lg. AB negativ und Br. AB positiv, aber für

$$-\beta > R,$$

Lg. AB und Br. AB negativ (125 und eb. Tr. 3. Erkl. 4. Z.)

II. $\beta = \pm 0^h$, (§. 94)

giebt

$$\text{Lg. AB} = 0$$
$$\text{Br. AB} = \pm \text{S. AB};$$

$\beta = \pm 6^h$ (§. 94.)

$$\text{Lg. AB} = \pm \text{S. AB}$$
$$\text{Br. AB} = 0$$

(125 und eb. Tr. 2. Erkl. 8. Z., 3. Erkl. 3. Z.)

III. Weil $\sin 45° = \text{Cos } 45°$; so hat man nach dem 20. §. und eb. Tr. 3. Erkl. 4. Z. noch folgendes:

Wenn

$$\beta = +3^h = +45°; \text{ (§. 94)}$$

so ist

$$\text{Br. AB} = \text{Lg. AB};$$

Aber für

$$\beta = -3^h = -45° \text{ (§. 95)}$$

ist die positive Breite so groß wie die negative Länge.

Wäre nun

$$\beta = +9^h = +(12^h - 3^h)$$
$$= +(180° - 45°);$$

so würde die bejahte Länge so groß wie die verneinte Breite seyn; hingegen für

$$\beta = -9^h = -(12^h - 3^h)$$
$$= -(180° - 45°)$$

hat

hat man

— Lg. AB = — Br. AB

IV. Alles dieses erhellet auch nach §. 123, wenn man in der XXVII Figur, die verschiedenen Lagen der AB betrachtet. In ihr bedeutet AN der nördliche Theil der Magnet- oder Mittagslinie SN, und WO die Linie die sie in A rechtwinklicht schneidet.

V) Wenn also einer Linie AB Streichen östlich und kleiner als 6 Stunden ist: so kommt ihr eine östliche Länge und nördliche Breite zu;

Ist es aber größer: so hat sie noch östliche Länge aber südliche Breite.

Streicht sie = SE 12 oder 0^h: so gehört ihr nur eine nördliche Breite, so groß wie ihre Sohle;

Wäre ihr Streichen = Ost 6^h; so hat sie nur eine östliche Länge, gleich ihrer Sohle.

Ist aber der AB Streichen westlich und kleiner als 6 Stunden; so ist ihre Länge westlich und Breite südlich;

Ist es hingegen größer; so kommt ihr eine westliche Länge und nordliche Breite zu.

Streicht sie West 12^h oder Mer 12; so hat sie nur südliche Breite, so groß wie ihre Sohle;

Hingegen bey dem Streichen W 6^h nur westliche Länge, ebenfalls ihrer Sohle gleich.

§. 127.

Anmerkung.

I. Da die Magnetnadel leicht zu Fehlern geneigt ist, und sonst viele Unbequemlichkeiten mit ihr verbunden sind: so war es nöthig auf Methoden zu denken, die entweder des Compasses Gebrauch ganz oder doch zum Theil entbehrlich machten.

II. Hiezu nun dienen die Längen und Breiten (23).

Durch diese wird man in den Stand gesezt, nicht nur ohne Compaß Grundrisse zu fertigen (26), sondern auch die meisten Markscheideraufgaben blos durch Rechnung aufzulösen; also viel genauer, als in den mehresten Markscheidebüchern gelehrt und von den meisten Markscheidern noch ausgeübt wird.

III. Der **Herr Oberberghauptmann von Oppel** hat, in dem Anhange zu seiner Markscheidekunst, auch zu dieser Absicht eine Methode angegeben, die mit der hier (II) viel Aehnlichkeit hat, aber nicht so bequem ist.

IV. Diese hier (II) haben wir dem **Herrn Bergmeister Scheidhauer**, in Freyberg, nebst vielen andern Verbesserungen der Markscheidekunst zu verdanken.

Sie sind zwar durch den Druck noch nicht bekannt, ausser, so viel ich weiß, zwo Abhandlungen, die sich in der Anzeige von der Leipziger ökonomischen

nomischen Societät in der Michaelismesse 1772 S. 90 u. f. finden.

Die erste ist die im 55. §. erwähnte, die andere aber eine Auflösung, durch Zeichnung und Rechnung, der Aufgabe: Das Streichen und Fallen eines Ganges aus drey auf demselben gegebenen Puncten zu bestimmen. Sie ist sehr deutlich vorgetragen, ihr aber kein Beweiß beygefügt.

Ueberhaupt hat der Herr Bergmeister Scheidhauer in einem sich verfertigten Manuscripte von den mehresten Aufgaben die in der Markscheidekunst vorkommen können, vollständigere Auflösungen, durch Rechnungen, aber meist ohne Beweis gegeben dabey oft welche durch Zeichnungen beygefügt.

Dieses Manuscript enthält, wie gedacht, sehr schätzbare **Beyträge zur Markscheidekunst**, welche durch den Druck gemeinnütziger werden würden, und jedem Markscheider, dem es nur um eine richtige Ausübung seiner Kunst zu thun ist, nicht anders als willkommen seyn muß.

Zu dessen Gebrauch wird weiter nichts erfodert, als daß man die nöthigen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie wisse, ausserdem die Einrichtung der Markscheiderwerkzeuge und wie man sich ihrer zu bedienen habe. —

V. Wer nicht allemal nach dem 125. §. Länge und Breite berechnen will, kann sich, (nach Art des 111. §.) **Längen- und Breitentafeln** fertigen.

Wenn nämlich

$$\text{S. AB} = P + Q + R \ldots;$$

so ist

$$\text{Lg. AB} = P \sin\beta + Q \sin\beta + R \sin\beta + \ldots$$
$$\text{Br. AB} = P \operatorname{Cof}\beta + Q \operatorname{Cof}\beta + R \operatorname{Cof}\beta + \ldots$$

Daher dürfen ebenfalls nur die Längen und Breiten der Theile, aus dem sich die gegebene Sohle jeder Linie AB allemal zusammen setzen läßt, in die Tafeln gebracht werden.

VI. Da nun

$$\sin(3^h - \beta) = \operatorname{Cof}(3^h + \beta)$$
$$\operatorname{Cof}(3^h - \beta) = \sin(3^h + \beta)$$

so ist

$$\text{S. AB} \times \sin(3^h - \beta) = \text{S. AB} \times \operatorname{Cof}(3^h + \beta)$$
$$\text{S. AB} \times \operatorname{Cof}(3^h - \beta) = \text{S. AB} \times \sin(3^h + \beta)$$

Hat man folglich für die ersten drey Stunden, die Längen und Breiten berechnet (V); so hat man sie alle berechnet.

VII. Tafeln für die Längen und Breiten sind wirklich berechnet, wiewohl noch keinem Markscheidebuche bey- oder sonst gedruckt, worden.

Dergleichen Berechnung ist unter andern von dem Herrn Bergmeister Scheidhauer geschehen. Er hat sie sehr bequem und für jedem Markscheider brauchbar, auf ähnliche Art, wie seine Sohlen- und Seigertafeln (§. III, X), eingerichtet. *)

Man

*) Da ich diese Tafeln izt nicht bey der Hand habe: So kann ich von ihrer nähern Einrichtung hier nichts beybringen.

Man bedient sich ihrer seit nicht gar zu langer Zeit, vornehmlich in Freyberg, mit gutem Erfolg.—

VIII. Der itzige Geschworne der Bergamtsre-fiere des Neustädtischen Kreises, **Herr Lindig**, dem ich die ersten Begriffe der Markscheidekunst zu verdanken habe, hat auch solche Tafeln berech-net, ist aber dabey der Oppelischen Methode (III) gefolgt, weil ihm dazumal die des Herrn Berg-meister Scheidhauers nicht bekannt war.

IX. Uebrigens erstreckt sich das, was im III. §. XIX von Berechnung der Söhlen und Seigerteu-fen gesagt worden, auch auf die Berechnung der Längen und Breiten.

§. 128.

Aufgabe.

Aus der Länge und Breite einer Linie AB, ihre Sohle, und ihr Streichen β, zu finden.

Auflösung.

1) $S.\,AB = \sqrt{[(Lg.\,AB)^2 = (Br.\,AB)^2]}$

2) $Tg\,\beta = \frac{Lg.\,AB}{Br.\,AB}$.

Beweis.

Für 1) erhellet die Sache aus Geom. 15. S. und §. 24; Für 2) aber so:

$$\frac{Lg.\,AB}{Br.\,AB} = \frac{S.\,AB \times \sin\beta}{S.\,AB \times Cos\,B} \quad (125)$$

$$= \frac{\sin\beta}{Cos\,\beta}.$$

§. 129.

Zusatz.

I. Aus positiver Länge und Breite, findet sich

$+\beta$ und $< R$;

Positiver Länge und negativer Breite

$+\beta$ und $> R$;

Negativer Länge und Breite

$-\beta$ und $< R$;

Negativer Länge und positiver Breite

$-\beta$ aber $> R$;

(128, 122, und eb. Tr. 4. Erkl. 1. Zus.)

II. Wenn also östliche Länge und nördliche Breite gegeben; so erhält man der Linie AB Streichen östlich und $<$ 6 Stunden, aber größer, aus östlicher Länge und südlicher Breite.

Ist südliche Breite und westliche Länge gegeben: so erhält man das Streichen westlich und $<$ 6 Stunden, aber größer bey nördlicher Breite und westlicher Länge.

III. Aus Ly. AB $=$ o, und positiver Breite, erhält man

$$\beta = 6^h,$$

aber

$$\beta = -6^h \text{ (§. 94)}$$

wenn die Breite negativ.

Ist die Breite $=$ o und die Länge positiv, so ergiebt sich

$$\beta = 0^h$$

und

$\beta =$

$$\beta = -\,0^h \text{ (94. §.)}$$

wenn die Länge negativ.

Hat man + Lg. AB = + Br. AB; so findet sich

$$\beta = +\,45^\circ$$
$$= +\,3^h,$$

hingegen

$$\beta = -\,3^h \text{ (94. §.)}$$

wenn die negative Länge so groß wie die positive Breite gegeben.

Aus der negativen Breite und positiven Länge, beyde gleich groß, ergiebt sich

$$\beta = 180^\circ - 45^\circ$$
$$= +\,12^h - 3^h$$
$$= +\,9^h$$

aber aus — Br. AB = — Lg. AB, erhält man

$$\beta = -\,(180^\circ - 45^\circ)$$
$$= -\,(12^h - 3^h)$$
$$= -\,9^h \text{ (94. §.)}$$

(128, 126)

§. 130.
Zusatz.

Wenn von den vier Größen im 128. §. oder 125. §., zwo gegeben sind; so lassen sich daraus die übrigen finden.

Man hat daher noch folgende brauchbare Formeln:

$$1)\ \sin\beta = \frac{\text{Lg. AB}}{\text{S. AB}}$$

$$2)\ \text{Br. AB} = \sqrt{[(\text{S. AB})^2 - (\text{Lg. AB})^2]}$$

3) $\mathfrak{S}. AB = \frac{\mathfrak{Lg}. AB}{\sin \beta}$

$= \mathfrak{Lg}. AB \times \mathrm{Cosec}\, \beta$

4) $\mathfrak{Br}. AB = \mathfrak{Lg}. AB \,.\, \mathrm{Cot}\, \beta$

5) $\mathrm{Cof}\, \beta = \frac{\mathfrak{Br}. AB}{\mathfrak{S}. AB}$

6) $\mathfrak{Lg}. AB = \sqrt{[(\mathfrak{S}. AB)^2 - (\mathfrak{Br}. AB)^2]}$

7) $\mathfrak{S}. AB = \frac{\mathfrak{Br}. AB}{\mathrm{Cof}\, \beta}$

$= \mathfrak{Br}. AB \,.\, \mathrm{fec}\, \beta$

8) $\mathfrak{Lg}. AB = \mathfrak{Br}. AB \,.\, \mathrm{Tang}\, \beta.$

§. 131.

Lehrſatz.

Es ſeyen AB, BC, AC, (Fig. XXVII) Linien wie §. 118:

So iſt die Summe der Längen von AB, BC = der Länge von AC, und die Summe der Breiten von AB, BC = der Breite von AC.

Beweis.

Die Sohlen von AB, BC, AC ſeyen, (Fig. XXVIII, XXIX) Ab, bc, Ac;

Durch A und b gehe die Magnet- oder Mittagslinien NS, und die dieſe winkelrecht ſchneidende Linien WO,

Man fälle von b, c auf NS die Lothe bf, cd, ce, und von c auf WO die Perpendikel cp, cg;

So

So hat man

$$bf = \text{Lg. } AB \mid bq = \text{Br. } AB$$
$$cd = \text{Lg. } BC \mid cp = \text{Br. } BC$$
$$Ce = \text{Lg. } AC \mid cg = \text{Br. } AC$$

Nun ist (Fig. XXVIII)

$$ce = cd + de$$

aber

$$cd = bf \text{ (Geom. 12. S. 3. Z.)}$$

Folglich

$$ce = cd + bf$$

Ferner:

$$cg = cp + pg$$

und

$$pg = bq$$

folglich

$$cg = bq + cp.$$

Die XXVIII. Figur ist nur für den Fall gezeichnet, wenn alles positiv ist; Es können aber der Linien AB, BC Längen und Breiten alle negativ oder theils verneint und theils bejaht seyn. Für alle Fälle aber läßt sich der Beweis auf ähnliche Art führen:

Z. B. sey (Fig. XXIX) der Linie BC Länge negativ, ihre Breite aber positiv, und die Länge und Breite von AB seyn wie vorhin: So ist

$$ce = de - cd$$
$$= bf - cd$$
$$= bf + (- cd)$$

und

$$cg = cp + bq$$

§. 131b.
Zusatz.

Aus der Linien AB, AC, Längen und Breiten, die Länge und Breite der Linie BC zu finden.

Da

$$\text{Lg. AB} + \text{Lg. BC} = \text{Lg. AC}$$

so ist

$$\text{Lg. BC} = \text{Lg. AC} - \text{Lg. AB}$$

Oder, weil

$$\text{Lg. AB} = -\text{Lg. BA}$$

also

$$-\text{Lg. AB} = \text{Lg. BA} \quad (124)$$

so ist auch

$$\text{Lg. BC} = \text{Lg. AC} + \text{Lg. BA}$$

dem vorigen §. gemäß, wenn man von B nach A und dann nach C geht.

Ferner:

$$\text{Br. AB} + \text{Br. BC} = \text{Br. AC}$$

also

$$\text{Br. BC} = \text{Br. AC} - \text{Br. AB},$$
$$= \text{Br. AC} + \text{Br. BA}$$

(131, 124)

§. 132.
Zusatz.

Es seyen AB, BC, CD . . . . EF und AF (Fig. XXVI) Linien wie §. 119:

So giebt die Summe der Längen dieser Linien AB, BC . . . . EF die Länge von AF, und die Summe jener Linien Breite, dieser Linie Breite (131).

IX.

Abziehen (demetatio).

§. 131.

Aufgabe.

Einer jeden vorgegebenen geraden Linie AB Größe und Lage; oder, welches einerley, den wahren Abstand des Puncts B von A und seine Lage gegen A, zu finden.

Auflösung.

I. Man messe die vorgegebene Linie mit der Lachterkette oder dem Lachterstab (76).

Suche die Grade ihrer Neigung (81) und bemerke dabey ob sie steige oder falle (83);

Ferner ihr Streichen und dessen Beschaffenheit, nach dem 90. oder 91. §. wenn des Compasses Gebrauch verstattet ist:

So hat man das Verlangte (27).

II. Wenn man den Compaß nicht brauchen darf: so sucht der Markscheider mit Hülfe der Eisenscheiben, das Streichen der vorgegebenen Linien zu bestimmen, vorher aber das Streichen einer andern mit der vorgegebenen verbundene Linie zu erfahren.

Wie man sich bey diesem Geschäfte eigentlich zu verhalten habe, lernt man unter andern aus Oppels Markscheidekunst, §. 497 u. f., wobey aber Herrn Hofr. Kästners 8. Anm. über die Markscheidekunst zum Nachlesen zu empfehlen ist.

III. Wer sich der Eisenscheiben nicht bedienen wollte, kann der AB (Fig. XXVII *) Streichen richtiger auf folgende Art finden:

1) Man ziehe eine Linie BC so, daß man mit dem Compaß ihr Streichen und dessen Beschaffenheit genau erfahren kann.

2) Merke ob sie von B aus, der AB zur Rechten oder Linken liege;

3) Messe auf BA, BC, gleich große Stücken, wie §. 107, III, erfodert; überdieß noch die Sehne AC;

4) Suche hierauf der Linien BA, BC Neigung (81);

5) Dann den Winkel ABC, (nach 107. §.); und

6) Aus diesem und den in 4) gefundenen Grössen, den AB, BC zugehörigen söhligen Winkel, (nach 108. §.);

7) Aus diesem endlich und dem in 1) gefundenen Streichen der Linie BC, auch der in 2) gemachten Bemerkung, das Streichen der Linien BA (nach 105. §.)

8) Ist nun dieses $\pm \beta$; so ist der AB Streichen $\mp \beta$. (64)

IIII. Hätte man der BC Streichen nicht durch den Compaß finden können; so hätte man von C oder B aus, eine oder mehrere andere Schnuren ziehen müssen, bis der leztern ihr Streichen mit dem Compaß gesucht werden konnte; daraus hätte man nach (II) der nächsten Linie CB,

oder BC, Streichen und aus dem, nach §. 105. der Linie AB, ihres zu finden gehabt.

§. 132.

Erklärungen.

Einer Linie Größe und Lage finden, heißt sie **abziehen**, und die abgezogene Linie selbst ein **Markscheiderwinkel.** *)

Mehrere abgezogene Linien machen einen **Markscheiderzug** oder **Zug** aus.

§. 133.

Zusatz.

Man **verrichtet** daher einen **Markscheiderzug**, wenn man die Lage und Größe mehrere gleichsam in einer Reihe nach einander folgende Linien sucht; Also die Lage und wahren Abstände der Puncte zwischen den diese Linien gezogen sind oder sich ziehen lassen.

§. 134.

Aufgabe.

Die Puncte A, B, C, D, E . . . . . F (Fig. XXVI.) abzuziehen, d. h. ihre Lage zu bestimmen (133), oder von A bis F einen Zug zu verrichten.

Auflösung.

I. Man nehme einen von diesen Puncten A, zum Anfangs- oder Anhaltepunct an;

Ziehe

*) Diese Benennung werden wir uns nicht bedienen, weil sie zu Irrungen leicht Anlaß geben kann, und der Sache gar nicht angemessen ist.

Ziehe von diesem auf einen andern B, mittelst der Schnur die gerade Linie AB;

Und bestimme ihre Größe und Lage (nach 131);

II. Nun ziehe man von B auf einen dritten Punct C, eine gerade Linie BC;

Und bestimme gleichfalls ihre Größe und Lage.

III. So verfahre man mit allen übrigen Linien, die sich von C nach D, E u. s. w. ziehen lassen.

IV. Kann man nicht (welches sich fast allemal zuträgt) von einem Hauptpuncte, B, zum andern, C, unmittelbar mit der Schnur eine gerade Linie ziehen:

So erwähle man schickliche Zwischenpuncte und bestimme deren Lage, wie vorhin; wodurch denn auch die Lage der Hauptpuncte, C, B, bestimmt wird (27).

§. 135.

Anmerkung.

Der Markscheider hat die Lage von Puncten, die ihm zu seinen Angaben nöthig sind, sowohl über Tage als in der Grube zu bestimmen.

Jene Bestimmung geschieht durch den Tagezug, diese durch den Grubenzug.

Bey jedem Zug aber pflegt man in dem Anhaltepuncte ein Merkmal, entweder in das feste Gestein einzuhauen, oder ein befestigtes Grubenzimmer einzuschneiden, oder auch über Tage durch einen Pfahl anzugeben.

Ein solches Merkmal heißt ein **Markscheiderzeichen.**

Dergleichen in den Hauptpuncten anzugeben, darf nicht auſſer Acht gelaſſen werden; weil dadurch bey Wiederholung eines Zugs, die erſte Schnur allemal in einerley Punct, wie gehörig, angehalten werden kann.

Solche Zeichen auch bey Zwiſchenpuncten anzubringen, iſt nicht nur zu gleicher Abſicht dienlich, ſondern, es können dadurch auch die Fehler die beym Abziehen etwa vorgefallen ſind, durch des Zugs Wiederholung, deſto eher entdeckt werden.

Ueberdieß iſt die Bemerkung ſolcher Zeichen **nothwendig**, wenn ein Zug nicht anf einmal beendiget werden kann, ſondern zu verſchiedenen Zeiten **nach zu bringen** hat; oder wenn von einem Puncte aus, nach verſchiedenen Gegenden gezogen werden muß. —

Bey allen Zügen muß man ſich die Linien nach ihrer Größe und Lage in der Ordnung aufſchreiben, oder **einſchreiben**, in der ſie abgezogen worden.

Zu dieſer Abſicht macht man ſich in die Schreibetafel folgende Columnen:

Wahrer Abstand	Anmerkungen.
Lachter	
Achtel	
Zolle	
Steig. Fall	
Grade	
Minuten	
Weltgegend	
Stunden	
Achtelst.	

Die an einer Linie gemessenen Größen nun werden allemal in eine Zeile nach der Ordnung, wie der Columnen Ueberschriften zeigen, geschrieben.

In der lezten Columne, wird alles das gebracht, was zu der Bestimmung des Orts Gegend gehört, wo man zieht. Es sind also daselbst die angebrachten Markscheiderzeichen genau anzumerken, überdies noch viele andere Umstände, die die Absicht

ficht eines Zugs erfodert. So kann z. B. darinne angezeigt werden: wo ganz Ort ansteht; wo Schächte und Gesenke vorhanden; die Lage und Entfernung von Tageschächten u. s. w.

Bey jedesmaligen Abziehen muß man die Magnetabweichung zu erforschen suchen und sich dieselbe nebst der Zeit der Beobachtung und des Abziehens anmerken, um allemal bey Fertigung des Grundrisses und dergleichen sich des reducirten Streichens bedienen zu können, welches besonders bey Zügen nöthig, deren Theile zu verschiedenen Zeiten verrichtet worden. —

Uebrigens ist über diese bisher abgehandelte Materie das dritte Hauptstück des Herrn v. Oppels Markscheidekunst zum Nachlesen zu empfehlen.

§. 136.

Aufgabe.

A und F (Fig. XXVI.) seyen zween Puncte, von den man von einem zum andern unmittelbar durch die Schnur keine gerade Linie ziehen kann.

Man soll ihren söhligen und seigern, auch wahren Abstand, und ihre Lage; oder der Linie AF Größe, Sohle und Seigerteufe, Neigung und Streichen, finden.

Auflösung.

1) Zwischen A und F nehme man Zwischenpuncte

puncte B, C, D, E, an, um von A bis F abziehen zu können.

2) Man verrichte diesen Zug: (134)

3) So findet man dadurch der AB, BC, CD, DE, EF Größe, Neigungswinkel und Streichen.

Aus diesen läßt sich deren Sohle und Seigerteufe, und dann deren Längen und Breiten berechnen (110, 111, 125, 125).

4) Die Summe der Seigerteufen und Sohlen, giebt der AF Sg. und Sohle (119).

5) Aus $\sqrt{[(\text{Sg. AF})^2 + (\text{S. AF})^2]}$ erhält man AF (115).

6) Der Seigerteufen Summe dividirt durch der Sohlen Summe, giebt der Linie AF, Neigung, und ob sie steigt oder fällt (115, 116).

7) Auch erhält man durch die Division der Summe der berechneten Breiten in die Summe der gefundenen Längen, dieser Linie AF Streichen und dessen Beschaffenheit (128, 129). Dieses aber ist observirtes oder reducirtes Streichen, nachdem es der abgezogenen Linien Streichen ist.

8) Hätte man von einem andern Puncte C nach A und F gezogen; so nehme man das entgegengesezte der Seigerteufen, Längen und Breiten der Linien entweder zwischen C und A, oder C und F; und verfahre wie vorhin.

9) Anmer-

Anmerkung.

9) Durch diese Aufgabe können viele zum Behuf des Bergbaues erfoderte Angaben bewerkstelliget werden, wie wohl einige nicht die ganze Auflösung erfodern.

Besonders ist sie bey Angebung eines Durchschlags brauchbar, und zwar wenn man von einem gegebenen Puncte aus, ansitzen, und in einen andern gegebenen erschlagen will. (Man sehe v. Oppels Markscheidekunst §. 792 .... 805.)

X.

Berechnung der Züge.

Erklärung.

§. 137.

Aus den gefundenen Größen (131) der abgezogenen Linien die ihnen zu kommenden Sohlen und Seigerteufen, Längen und Breiten auch reducirten Streichen finden, heißt den **Zug berechnen**

§. 138.

Anmerkung.

Dieß kann nun für die Sohlen und Seigerteufen nach §. 110. oder 111, für die Längen und Breiten nach §. 125. oder 127, und für das reducirte Streichen nach §. 102 geschehen.

Um aber alle Puncte des Zugs, und die jeder abgezogenen Linie zukommenden Größen leicht zu

übersehen, auch allen Irrthum, der sich etwa durch Verwechslung dieser Größen ereignen könnte, vorzubeugen, hat man den berechneten Zug in eine tabellarische Form, nach der Ordnung wie die abgezogenen Linien auf einander folgen, zu bringen, und darein aus der Schreibetafel die gefundenen Größen, und dann die berechneten, wie sie zusammen gehören, zu schreiben.

Die ganze Sache wird sich aus folgendem Beyspiele, sehr leicht begreifen lassen.

Wahrer Abstand		Neigung			Seigerteufen		Observirtes Streichen			Reducirtes Streichen		Sohlen		Längen		Breiten		Anmerkungen. Die Magnetabweichung war 1^h = 15° westlich.
Lr.	Achtllr.		Gr.	Min.	Lr.	Achtllr.	WG.	St.	Achtst.	St.	Achtst.	Lr.	Achtllr.	Lr.	Achtllr.	Lr.	Achtllr.	
																		Von Anfangspt. A
5	0,00	St.	30	15	2	4,151	Ost	3	2	2	2	4	2,553	2	3,191	3	4,720	bis B
10	0,00	F	40	20	—6	3,778	W.	7	6	6	6	7	4,983	—7	5,552	1	5,362	bis C
					—4	1,627								—5	2,361	5	2,082	AC (§. 119; 132)
7	5,90	F	20	10	—2	5,000	W.	11	0	10	0	7	2,110	—3	6,550	6	4,920	bis D
					—6	6,627								—9	0,911	11	7,002	AD
3	3,70	St.	30	30	2	0,600	Ost	1	0	0^h	0	2	7,920	0	0,000	2	7,920	bis E
					—4	6,027								—9	0,911	14	6,922	AE
3	3,70	F	30	30	—2	0,600	W.	1	0	12^h	0	—2	7,920	0	0,000	—2	7,920	zurück bis D
					—6	6,627								—9	0,911	11	7,002	AD
6	2,13	St.	70	25	6	7,230	Ost	5	$6\frac{1}{2}$	4	$6\frac{1}{2}$	2	0,800	1	2,100	0	5,140	Von da bis F
					0	0,603								—7	6,811	12	4,142	AF

Die Längen und Breiten sind in dieser Tabelle nach dem reducirten Streichen berechnet worden.

Die negativen Seigerteufen, Längen und Breiten, werden in der Ausübung gemeiniglich mit schwarzer Dinte, die positiven aber, mit rother, geschrieben; wenigstens ist es so in Freyberg im Gebrauch. Man kann auch diese negativen Größen, wie gewöhnlich (Ar. I. 92) andeuten, und vor die positiven nichts setzen; welches auch in vorstehender Tafel geschehen, wo die fallenden Seigerteufen, westlichen Längen, und südlichen Breiten, die sind, vor den das Zeichen: —, steht.

§. 139.

Anmerkung.

Bey einem Markscheiderzuge sind oft viele Zwischenpuncte nur angenommen worden, um den Zusammenhang des Zugs zu erhalten, haben aber in den Angaben sonst keinen Einfluß. Man thut daher oft sehr wohl aus einem berechneten weitläuftigen Markscheiderzug nur der bey den Angaben nöthigen Puncte Seigerteufen, Längen und Breiten, zu nehmen, und dadurch den berechneten Zug gleichsam in die Kürze zu ziehen. Wie dieß geschehen kann, ist leicht aus §. 118^{b}, 131^{b} zu ersehen.

XI.

Grund- und Seigerriß (ichnographia et orthographia).

§. 140.

Aufgabe.

Einer Linie AB (Fig. XXX) **Länge und Breite ist gegeben:**

Man soll sie in Grundriß oder auf eine söhlige Ebne verzeichnen.

Auflösung.

Man nehme auf der söhligen Ebne einen Punct, a als des A Proj. an, und ziehe durch ihn eine Linie NS, welche die Mittagslinie vorstelle, dessen nördlicher Theil, aN, und südlicher, aS.

NS könnte auch die Magnetlinie seyn, wenn die gegebene Länge und Breite nach dem observirten Streichen berechnet worden wäre.

Es ist aber allemal besser, wenn man bey Verzeichnung im Grundrisse ꝛc. sich des reducirten Streichen bedient; wie man leicht sieht.

Gesezt nun, die gegebene Breite wäre nördlich; so nehme man ac auf aN der gegebenen Breite gleich.

Aus c richte man auf aN das Loth cd, auf, daß wenn die Länge der Linie AB östlich, es sich auf die Ostseite (wie in der Fig.) und wenn sie westlich, auf die Westseite der aN erstrecket.

Hierauf nehme man cb = der gegebenen Breite, und ziehe ab;

So

So ist geschehen, was man verlangt (22, 22b, 120, 122).

§. 141.

Aufgabe.

Die Längen und Breiten der Linien AB, BC, CD, DE ꝛc. (Fig. XXXI) sind bekannt, (indem von A bis E ꝛc. gezogen, und der Zug berechnet worden):

Man soll dadurch genannte Linien im Grundriß verzeichnen.

Auflösung.

Auf der söhligen Ebne worauf die Verzeichnung geschehen soll, nehme man ebenfalls einen Punct A als den Anfangs- oder Anhaltepunct an, und ziehe durch denselben eine Linie NS die die Mittagslinie sey; welche aber für die Magnetlinie angenommen werden muß, wenn man sich des observirten Streichen bedient.

AN sey gleichfalls der NS nördlicher Theil und AS ihr südlicher.

Nun verzeichne man nach dem vorigen §, die Linie AB im Grundriß.

Um aber dieß auch mit der nächstfolgenden zu thun, so nehme man auf der Mittagslinie Ad = der Summe der Breiten der Linien AB, BC, und zwar auf dem nordlichen oder südlichen Theile, nachdem der genannten Breiten Summe positiv oder negativ ist.

Durch d ziehe man eine Linie FG winkelrecht mit der angenommenen Mittagslinie;

Nehme auf derselben dC = der Summe der Längen der Linien AB, BC, und zwar auf der Ost- oder Westseite, nachdem diese Summe positiv oder negativ ist;

Hierauf ziehe man B'C; und verfahre mit den übrigen Linien auf gleiche Art:

So erhält man das Verlangte (140).

§. 143.
Anmerkung.

I) Bey einem weitläuftigen Markscheiderzug können, besonders wenn man einen etwas großen Maasstab gebrauchen will, die Längen und Breiten der Linien die von dem auf der söhligen Ebne angenommenen Anfangspuncte auf andere Puncte zu ziehen sind, sehr groß ausfallen, daß man selbige mit dem Zirkel nicht fassen kann.

Man kann sich daher mit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer, folgendes vortheilhaftes Verfahren bedienen.

II) Auf der söhligen Ebne, dem Papiere, worauf die abgezogenen Linien oder Puncte im Grundriß verzeichnet werden sollen, zieht man durch den angenommenen Anfangspunct, A (Fig. XXXII) nach Gefallen, wie man es bequem findet, eine Linie, NS als die Mittags- oder Magnetlinie, nachdem man, wie schon gedacht, das reducirte oder observirte Streichen in Betrachtung zieht.

III. Hierauf bestimmt man der NS nördlichen Theil AN, und schreibt an der AN Endpunct, Nord oder N; und an dem des südlichen Theils AS, Sud oder S.

IV. Mit NS werden auf beyden Seiten von 10 zu 10 Lachtern gleichlaufende Linien gezogen, die man an ihren Enden, von N und S aus, mit 10, 20, ꝛc. bezeichnet. Diese Zahlen deuten dieser Linien Entfernungen von NS in Lachtern an.

Denen die von N und S nach der Westseite zu gehen, nach W, setze man, wie den westlichen Längen, das Zeichen — vor; denen nach der Ostseite aber nichts.

Gewöhnlich schreibt man in Freyberg jene Zahlen mit schwarzer diese mit rother Dinte.

V. Nun ziehe man, ebenfalls durch A, eine Linie WO, die NS rechtwinklicht schneidet, und mit dieser auch auf beyden Seiten von 10 zu 10 Lachter Parallelen, die man gleichfalls an ihren Enden von W und O aus mit 10, 20 ꝛc. bezeichnet; welche Zahlen der Parallelen Entfernung von WO in Lachtern andeuten.

Denen von W und O nach S, der Südseite zu, laufende Zahlen, setze man auch, wie den südlichen Breiten, das — Zeichen vor, den andern nichts.

Man könnte auch, wie gewöhnlich, jene schwarz diese roth schreiben.

VI. Durch diese Verfahren entstehen auf der söhligen Ebne eine Menge Quadrate, davon jedes Seite = 10 Lachter. Ihre Winkelpuncte sind solche, deren Längen und Breiten Vielfache von 10 Lachter sind.

So ist des Puncts p Länge = — 10 Lachter, also westlich, und Breite = 20 Lachter, also nördlich; Oder die mit — 10 bezeichnete der NS gleichlaufende Linie schneidet die mit 20 bemerkte, der WO parallelen Linie in einem Puncte p, der in Rücksicht des Puncts A oder der Linie Ap, gleich angeführte Länge und Breite hat.

VII. Um nun einen Punct P im Grundriß zu verzeichnen, verfährt man so.

VIII. Gesezt, des Puncts P Länge sey = — 13, 58 Lachter, seine Breite aber = 26, 42 Lachter: also jene westlich, diese nördlich.

Weil — 13, 58 Lachter = — 10 + (— 3, 58) Lachter und 26, 42 Lachter = 20 + 6, 42 Lachter; So bestimme man erstlich einen Punct p dessen Länge = — 10 Lachter, und Breite = 20 Lr.

Dieser ist nach (VI) der, in welchem die mit NS parallele und — 10 bezeichnete Linie ab die, mit WO gleichlaufende und mit 20 bemerkte Linie, cd, schneidet.

X. Nun sieht man leicht, daß der Punct P in das Quadrat p 30 fallen muß.

XI. Um ihn aber darinne zu finden, nimmt man

auf

auf ab von p aus, pq = 6, 42 Lachter, dem andern Theile des Puncts P. Breite, und eben so groß auch ce;

Legt an die so gefundenen Puncte q, e das Lineal, und zieht mit Bleystift die Linie eq.

Weil nun des Puncts P Länge westlich, so trage man auf qe von q aus, die — 3, 58 Lachter, als den andern Theil des Puncts P Länge:

So hat man den Punct P.

XII. Auf gleiche Art verfährt man mit allen im Grundriß zu verzeichnende Puncte.

XIII. Uebrigens sieht man, daß das ganze Verfahren, mit dem im vorigen §. im Grunde einerley ist.

§. 144.
Anmerkung.

Die beyden vorhergehenden Paragraphen enthalten das Wesentliche der Verfertigung eines Grundrisses.

Was sonst noch dabey zu beobachten lernt man aus des Herrn v. Oppels Markscheidekunst, vierten Hauptstück §. 756 ꝛc. u. a.

Hiebey will ich noch erinnern, daß man auf demselben ebenfalls die Magnetabweichung zu bemerken habe. —

Die Markscheider fertigen den Grundriß gewöhnlich mit dem Zuleginstrument. Wie dieß geschieht begreift man von selbst, aus bloßer Kenntniß

niß des Compasses und des 21. §. Ueberdieß kann man es auch aus den Markscheidebüchern eines v. Oppels, Beyers, Weidlers ꝛc. lernen.

Indessen ist die in dem 142. und 143 §. gelehrte Methode viel zuverläßiger und bequemer, und daher zum Gebrauch sehr zu empfehlen.

Denn erstlich entgeht man dadurch den Fehlern, den die Magnetnadel so leicht ausgesezt ist;

Zweytens, pflanzt sich der Fehler, den man etwa aus Versehen in Verzeichnung eines Puncts begangen hätte, nicht fort, welches hingegen mit dem Compaß geschieht.

Drittens geht die Arbeit weit geschwinder von statten, als mit dem Compasse; und

Viertens lassen sich leicht auf ein besonderes Blatt, die Hauptpuncte, die dem Markscheider wegen einer von ihm gefoderten Angabe nöthig sind, verzeichnen; welches mit dem Compaß nicht angeht, demohnerachtet aber ofte vorkommen kann; und dieß auf einen Grundriß, der den ganzen Grubenbau vorstellt zu thun, ist eben nicht dienlich.

§. 145.

Anmerkung.

Zu den im Grundriß verzeichneten Puncten einen Seigerriß zu fertigen, ist schon aus dem 10. und 26. §. begreiflich.

Indessen aber lernt man das Verfahren aus des Herrn von Oppels Markscheidekunst §. 741 ꝛc.

H. Käst-

H. Kästners Markscheidekunst 16. Anm. Weidlers Markscheidekunst 101. §. lat. Or. 102. §. der d. Ueb.; und aus allen andern Markscheidebüchern.

§. 146.

Aufgabe.

A, C seyen zween in einer söhligen Ebne liegende Puncte; das Streichen h und dessen Beschaffenheit, auch die wahre Länge g von AC ist bekannt; Nun sollen von A und C Linien AB, CB in gegebenen Streichen, wovon jener Streichen=α dieser ihres=β, gezogen werden:

Man verlangt die Größe der Linien AC und BC.

Auflösung.

Der Winkel

$$\left.\begin{aligned} C &= \alpha - h \\ B &= \alpha - \beta \\ A &= h - \beta \end{aligned}\right\} (103)$$

Und nach eb. Tr. 10. S.

$$\sin B : AC = \sin C : CB = \sin A : AB$$

Also

$$CB = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot AC$$

$$AB = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot AC$$

Folglich, gehörig substituirt

CB

$$CB = \frac{\sin(\alpha - h)}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot AC$$

$$AB = \frac{\sin(h - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} \cdot AC$$

XII.

Einige Aufgaben, auf viele Fälle des Bergbaues anwendbar.

§. 147.

Erklärung.

Wenn ein Punct B (Fig. XXXIII) anzugeben und seine Lage aus andern bekannten Puncten und Linien zu bestimmen ist, ein Markscheider aber diesen Punct da annimmt (in H) wo er muthmaßet, daß er hinfalle, und diesen so angenommenen Punct mit den bekannten Puncten bey Verrichtung eines Zuges auf gehörige Art verbindet; so heißt dieses Verfahren, **nach verlohrner Schnur ziehen,** (funiculo indefinito metiri).

§. 148.

Aufgabe.

Es ist ein Punct A gegeben:

Man soll einen andern Punct B, so bestimmen, daß die Linie AB ein gegebenes Streichen γ und Sohle $Ab = S$, hat.

Auflösung.

I. Man verrichte von A bis in H einen Zug nach verlorner Schnur:

So

So findet sich dadurch nach §. 136. der AH Sohle, = ſ und Streichen = β auch ob es von A aus östlich oder westlich sey, wodurch denn man auch die Beschaffenheit der Linie HA (62) Streichen (66, 65) weiß.

II. Kann man der AB Sohle Hb und Streichen nebst dessen Beschaffenheit, finden, so ist der Aufgaben ein Gnüge geschehen.

Dieß aber findet sich aus (I) folgendergestalt.

III. Nach §. 103. kann man aus β und γ den Winkel bAH berechnen, welcher also bekannt ist.

IIII. Aus eb. Tr. 20. S. 1. Z. aber hat man

$$Hb = \sqrt{(S^2 + f^2 - 2 . S . f . Cos bAH)}$$

wobey man sich erinnern muß, daß, wenn bAH stumpf, Cos bAH verneint ist.

V. Um der HB oder Hb Streichen zu finden, muß man einen der beyden Winkel AHb, AbH, nach eb. Tr. 15. S., oder wenn Hb gefunden nach dem 10. S. berechnen.

VI. Ist dieß mit dem Winkel AHb geschehen, so hat man daraus, und aus der HA (62) Streichen, nach §. 105. der Linie Hb Streichen und dessen Beschaffenheit.

VII. Wäre H ein Punct auf dem Gebürge, so bestimmte man B, wenn man von H aus mittelst des Winkelweisers *) oder auf sonst eine Art, eine

söhlige

*) Das Verfahren mit dem Winkelweiser lernt man am besten aus Hn. v. Oppels Markſchk. §. 472 ꝛc.

söhlige Linie zöge, die dies im (VI) gefundene Streichen hätte, überdieß auf ihr = Hb (IV) nähme.

VIII. Für H einen Punct in der Grube geschieht diese Bestimmung mit söhlig gezogenen Schnuren.

§. 149.

Anmerkung.

Durch diese Aufgabe können viele Angaben gelößt werden, die man in Herrn von Oppels Markscheidekunst §. 809 bis 818 angegeben findet.

Hier will ich noch erinnern, daß wenn B seiger über A liegen soll, S und γ, = o sind; daher hat man (nach vorigen §. I.) nur der Linie HA Sohle und Streichen nebst dessen Beschaffenheit zu suchen, und dieß nach VII. vorigen §. von H weg anzugeben.

§. 150.

Aufgabe.

Es ist ein Punct A gegeben:

Man soll einen Punct B bestimmen, der in der durch A gehenden söhligen Ebne so liegt, daß wenn man durch B und A eine gerade Linie BA zieht, diese ein gegebenes Streichen β habe.

Auflösung.

I. Man ziehe von A bis H nach verlorner Schnur: (147)

So

So findet sich dadurch mittelst des 136. §. der Linie AH

Seigerteufe Hb, und ob sie von H weg-
steigt oder fällt;
Sohle Ab, und
Streichen = γ, nebst dessen Beschaffenheit.

II. Wenn man sich von b in der söhligen Ebne BbA eine Linie bB an BA winkelrecht gezogen vorstellt; so schneidet diese, AB in dem verlangten Puncte B (Bed.).

III. Nun hat man nach §. 103. aus β und γ den Winkel bAB, der = δ seyn mag.

IV. Also weiß man in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke bBA genannten Winkel δ, und überdieß noch die Hypothenuse AB, = S. AH (I).

V. Folglich erhält man für den Sinus totus = 1
bB = S. AH . sin δ (eb. Tr. 19. S. Vor. 9)

VI. Man bestimme also von H aus eine söhlige Linie Hh die ein Streichen hat, daß von dem gegebenen Streichen β um 6 Stunden oder 90° verschieden ist, und dessen Beschaffenheit mit der des Streichens der Linie HA übereinkommt.

VII. Auf dieser so bestimmten Linie, nehme man Hh = bB (V)

VIII. Und ziehe von h eine seigere Linie hB = Hb = Sg. AH, dessen Größe und Beschaffenheit, man aus (I) kennt.

So hat man den verlangten Punct B.

§. 151.

Anmerkung.

Die Anwendung vorigen §s, findet man in Oppels Markscheidekunst, §. 819 . . . 823.

XIII.

Bestimmung der Lage eines Ganges.

§. 152.

Erklärung.

I. Man stelle sich durch das Gebürge, oder einen Theil desselben, eine Ebne in willkührlicher Lage gesezt vor: So wird zu Bestimmung dieser Lage

1) der Winkel, den die Ebne mit einer Horizontalebne macht, und

2) der Winkel den beyder Ebnen (1) Durchschnitt mit der Magnet- oder Mittagslinie; oder die durch diesen Durchschnitt gehende seigere Ebne mit der Magnet- oder Mittagsebne, einschließt, erfodert.

II. Der erste heisse der Ebne (I) **Neigung**; — Gewöhnlich nennt man ihn ihr **Fallen**; — der andere aber ihr **Streichen**.

§. 153.

Anmerkung.

Was von dem Streichen einer Linie, oder der durch sie gehenden seigern Ebne gesagt worden, gilt auch von jeder andern Ebne.

§. 154.

Erklärung.

Wenn in einer Ebne von einem Puncte auf dem

dem Durchschnitte dieser Ebne mit einer söhligen, eine Linie senkrecht gezogen;

So heißt sie die **Linie des Fallens.**

§. 155.

Zusatz.

Genannte Linie hat also mit der ihr zugehörigen Ebne, einerley Neigung (152. und G. 2 Th. 1, 2. Erkl.); Aber ein Streichen, das von dem der Ebne um 6 Stunden unterschieden ist.

§. 156.

Erklärung.

Wenn man auf einer Linie einen Punct annimmt, und alle Puncte über den angenommenen gegen Morgen, unter ihn aber gegen Abend, liegen; so heißt sie **rechtfallend** sonst **widersinnig fallend.**

§. 157.

Anmerkung.

Einer rechtfallenden Linie Neigung wollen wir, mit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer durch den spitzigen Winkel, den sie mit der durch ihren Anfangspunct gehenden söhligen Ebne macht, ausdrücken, durch den stumpfen und jenen zu 180° ergänzenden Winkel aber, wenn sie widersinnig fällt.

§. 158.

Erklärung.

Eine Ebne heißt **recht-** oder **widersinnig fallend**, nachdem es die Linie ihres Fallens ist.

Der vorige §. findet auch hier seine Anwendung.

§. 159.

Anmerkung.

Unter allen geraden Linien, die in einer schiefen Ebne gezogen werden, macht keine mit einer söhligen Ebne einen größern Winkel als die Linie ihres Falles.

Der Beweis dieses Satzes findet sich in Herrn Hofr. Kästners astronom. I. Abh. 269, S. 57.

Auf ihm beruht die gewöhnliche Art der Markscheider einer Ebnen (oder vielmehr eines Ganges) Neigung zu finden, ohne daß man das Streichen weiß.

§. 160.

Erklärungen.

I. Man stelle sich durch das Gebürge oder einen Theil desselben zwo parallele Ebnen gesezt vor, die die über einander liegenden Schichten der Gebürgsmasse, die **Gebürgslager**, durchschneiden.

II. Wenn man sich nun den Raum zwischen diesen Ebnen mit einer Masse, die von der der Gebürgslager unterschieden ist, ausgefüllt denket: So hat man einen **Gang** (vena), wie ihn, um seine Lage zu bestimmen, sich der **Berggeometer**, vorstellen muß.

III. Diese Ebnen sieht man als die äußersten Flächen, die einen Gang begränzen und seine Breite, oder **Mächtigkeit** bestimmen, als die **Saalbänder**, an.

IV.

IV. Die eine von den parallelen Ebnen (I) die mit dem zwischen ihr und der andern Ebne (I) enthaltnen Theil einer söhligen Ebne einen spitzigen Winkel, macht, heißt das **Hangende**, auch das **hangende Saalband**; die andere Ebne (I) aber die mit diesem Theile einen stumpfen Winkel einschließt, das **Liegende**, auch das **liegende Saalband**.

§. 161.
Zusatz.

Wenn man also die Lage einer solchen Ebne (160. I) bestimmt hat (152): so ist dadurch auch zugleich die Lage des Ganges (160, II) bestimmt (Geom. 47. S. 6. Z.)

§. 162.
Erklärung.

Diese Ebne (161), wollen wir des **Ganges Ebne** (venae planum) nennen.

§. 163.
Anmerkung.

Ein Gang ist oft, ausser andern Veränderungen, auch welchen in seiner Lage unterworfen: daher findet die einfachste geometrische Vorstellung (161, II) nicht allemal in der Natur statt.

Doch kommt es hiebey nur darauf an, ob die verschiedenen Lagen eines Ganges beträchtlich von einander abweichen, oder nicht.

Im leztern Falle findet allemal der 161. §. seine Anwendung; im erstern hingegen nur bey Theilen

eines Ganges, wovon jeder entweder eine und dieselbe Lage hat, oder gleichfalls auch verschiedene, aber nicht beträchtlich von einander abweichende Lagen.

§. 164.

Anmerkung.

Wenn man also die verschiedenen Lagen eines Ganges, seine besondern Lagen, in Anschlag zu bringen hat: So muß man die Lage der Ebne jedes Theils suchen.

§. 165.

Anmerkung.

Drey nicht in gerader Linie liegende Puncte bestimmen die Lage einer Ebne (G. II. Th. Grundsf.)

Sind folglich auf einem Gange drey solche Puncte gegeben; so hat die dadurch laufende Ebne einerley Lage mit des Ganges Theils, worinne sie liegen.

Je weiter aber diese Puncte von einander entfernet sind, desto genauer findet sich durch die Lage der dadurch gehenden Ebne, die **Hauptlage** des Ganges.

§. 166.

Anmerkung.

Um die Lage der Gangesebne agf, (Fig. XXXV, XXXVI) durch drey nach vorigen §. auf ihr gegebenen Puncten g, a, f, zu bestimmen, muß man von einem zum andern, von g bis a, und dann bis f einen Zug verrichten können, damit man nach dem

dem 136. §. dieser drey Puncte, oder der Linien ag, af, Lage, wahren Abstand ꝛc. zu finden, im Stande sey.

Lehrsatz.

§. 167.

Wenn die Linien ag, af, (166) beyde von a weg zugleich steigen oder fallen, und ihre Endpuncte g, f liegen in einer söhligen Ebne:

So hat die durch g und f gehende Linie mit der Gangesebne agf, in der ag und af liegen, einerley Streichen.

Beweis.

Denn g und f befinden sich in der Ebne gaf, und zugleich auch, wie angenommen, in einer söhligen Ebne; folglich in beyder Durchschnitte, gf, welche mit der Ebne agf einerley Streichen hat (152)

§. 168.

Zusatz.

Liegt einer von den beyden Puncten g, f höher oder tiefer als der andere, z. E. g (Fig. XXXVI): So lege man durch g eine söhlige Ebne gαβ, und verlängere af bis an beyder Ebne gaf, gαβ Durchschnitt: So liegen die Puncte g, β in einer Linie die eben das Streichen hat als die Ebne gaf (167).

§. 169.

Zusatz.

Wenn man also durch die drey gegebenen Puncte g, a, f, das Streichen der durch g, f, oder g, β, gehenden söhligen Linie zu bestimmen weiß; so fin-

der man dadurch zugleich auch das Streichen der Gangesebne gaf (167, 168).

§. 170.

Zusatz.

Von a, dem Puncte den die Linien ga, fa (166) gemein haben, fälle man auf die söhlige Ebne gαβ (168) das Loth aα, welches leztere Ebne in α schneiden wird:

So ist

$$\alpha a = Sg.\ a\beta = Sg.\ ag \quad (13)$$

und bekannt (166).

Nun ziehe man durch α und die Puncte g, β, die im Durchschnitte der söhligen Ebne mit des Ganges Ebne liegen, die geraden Linien αβ, αg;

So ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha\beta &= S.\ a\beta \\ g\alpha &= S.\ ag \end{aligned}\right\} (14)$$

und αβ hat folglich mit aβ, und αg mit ag, einerley Streichen (20).

§. 171.

Zusatz.

Da die Dreyecke aαβ, aαg, bey α rechtwinklicht (Geom. II. Th. 1. Erkl.): So ist

$$\left.\begin{aligned} 1 : \mathrm{Cot}\ a\beta\alpha &= a\alpha : \alpha\beta \\ 1 : \mathrm{Cot}\ ag\alpha &= a\alpha : g\alpha \end{aligned}\right\} (\text{eb. Tr. 6. S. 1. Anm.})$$

Aber der Winkel

$$\left.\begin{aligned} a\beta\alpha &= \text{der } a\beta \text{ Neigung} \\ ag\alpha &= \text{ " } ag \text{ " } \end{aligned}\right\} (15)$$

also bekannt (166); Jene heisse i, diese I: So hat man

$$I : \text{Cot } i = a\alpha : \alpha\beta$$
$$I : \text{Cot } I = a\alpha : g\alpha$$

Also:

$$\alpha\beta = a\alpha \,.\, \text{Cot } i$$
$$\alpha g = a\alpha \,.\, \text{Cot } I$$

Oder

$$\left.\begin{aligned} \text{S.}\, a\beta &= \text{Sg.}\, ag \,.\, \text{Cot } i \\ \text{S.}\, ag &= \text{Sg.}\, ag \,.\, \text{Cot } I \end{aligned}\right\} (170)$$

§. 172.

Zusatz.

Alles das bisher (167 ... 171) behauptete, gilt auch, wenn eine von den beyden Linien ag, af von α aus fällt und die andere steigt, wie z. E. ak.

Denn dieser Fall läßt sich auf die Voraussetzung des 167. §. bringen.

Es liegt nämlich die Sohle von ak von α weg, auf der Linie αl, die auf der söhligen Ebne g$\alpha\beta$ (168) durch α in eben dem Streichen der Linie ak gezogen (20).

Nimmt man nun ak von a weg als fallend an, weil ag fällt; so wird die Sohle von ak, von α aus, auf der rückwärts verlängerten α liegen; nimmt man aber die Linie ag so an, daß sie von a weg steigt, weil ak, von a aus, steigend ist: so liegt von α weg die Sohle von ag auf der rückwärts verlängerten, und wie ga streichenden Linie gα, auf αq.

§. 173.

§. 173.

Aufgabe.

Auf der Ebne eines Ganges sind drey nicht in gerader Linie liegende Puncte a, g, f gegeben, daß man von einem zum andern ziehen kann:

Man soll dieser Ebne Streichen finden:

Auflösung.

I. Man ziehe von g bis a, und dann von a bis f: So läßt sich daraus nach §. 136. der Linien ag, af Neigungswinkel, I, i (171) Sohlen und Seigerteufen, Längen und Breiten berechnen.

II. Nun findet sich das verlangte Streichen folgendergestalt

1) durch geometrische Zeichnung.

III. Man verzeichne die abgezogenen Linien ag, af im Grundriß.

IV. Fallen oder steigen beyde zugleich von a aus: So trage man auf die söhlig zugelegten Linien qg, lβ, von dem Puncte α aus, wo sie einander schneiden, die Cotangenten ihrer Neigungswinkel, multiplicirt in die größte Seigerteufe der beyden abgezogenen Linien, und zwar dahin zu, wohin sie von a aus ihr Streichen haben;

V. Ziehe durch die so bestimmten Puncte (IV), eine gerade Linie:

VI. Diese hat das verlangte Streichen (171, 172, 169).

VII.

VII. Fällt aber eine der beyden Linien (I), z. E. ag, und die andere z. B. ak steigt:

So verzeichne man sie ebenfalls im Grundriß.

In der XXXVI. Figur stellen sie αg, αl vor.

VIII. Nun hat αg eben das Streichen das ag, hat (20), und αβ das entgegengesezte von ak (20, 65). Man nehme daher αg = Sg. ag *) × Cot I und αβ = Sg. ag × Cot i.

IX. Die durch die so bestimmten Puncte (VIII) gehende Linie hat das verlangte Streichen (172).

X. Man kann auch Sg. ag × Cot I von α auf αq nehmen, alsdenn aber muß Sg. ag × Cot i von α auf αl genommen werden.

XI. Die vorhin (X) bestimmten Puncte liegen in einer geraden Linie, die das zu suchende Streichen hat (172).

2) Durch Rechnung.

A) Wenn beyde Linien ag, af, zugleich steigen oder fallen; oder ga steigt oder fällt und af fällt oder steigt.

XII. Wenn g und f in einer söhligen Ebne lägen (Fig. XXXVI); so dürfte man aus den in (I) gefundenen Längen und Breiten der Linien ga, af, die Länge und Breite der Linie gf berechnen (nach 131. §.), und daraus nach §. 128. der gf Streichen suchen, welches das verlangte seyn würde (169).

XIII.

*) Als die größte Sg. der abgez. Linien.

XIII. Wenn dieß (XII) aber nicht ist; so muß man aus den Längen und Breiten von ga, aβ (Fig. XXXVI) der gβ Streichen suchen (169, 128).

XIV. Nun ist wohl Länge und Breite von ga bekannt (I), aber nicht von aβ.

Diese aber findet man so:

XV. Der Linie af Streichen sey = h: So ist

$$\text{Lg. } a\beta = \text{S. } a\beta \cdot \sin h \text{ (125)}.$$

XVI. Aber

$$\text{S. } a\beta = \text{Sg. } ga \times \text{Cot } i \text{ (171)}$$

$$= \text{Sg. } ga \times \frac{\text{Cos } i}{\sin i} \text{ (eb. Tr. 4. Erkl. 3. 3.)}$$

$$= \text{Sg. } ga \times \frac{\text{Cos } i \cdot af}{\sin i \cdot af}$$

$$= \text{Sg. } ga \times \frac{\text{Soh. } af}{\text{Sg. } af} \text{ (125)}$$

XVII. Also

$$\text{Lg. } a\beta = \text{Sg. } ga \cdot \frac{\text{S. } af}{\text{Sg. } af} \cdot \sin h \text{ (XV, XVI)}$$

$$= \text{Sg. } ga \cdot \frac{\text{Lg. } af}{\text{Sg. } af} \text{ (125)}$$

$$= \frac{\text{Sg. } ga}{\text{Sg. } af} \cdot \text{Lg. } af$$

XVIII. Ferner

$$\text{Br. } a\beta = \text{S. } a\beta \cdot \text{Cos } h \text{ (a. D.)}$$

$$= \text{Sg. } ga \cdot \text{Cot } i \cdot \text{Cos } h \text{ (171)}$$

$$= \text{Sg.}$$

$$= \text{Sg. ga} \cdot \frac{\text{Cof i}}{\text{fin i}} \cdot \text{Cof h}$$

$$= \text{Sg. ga} \cdot \frac{\text{Cof i} \times \text{af}}{\text{fin i} \times \text{af}} \cdot \text{Cof h}$$

$$= \text{Sg. ga} \frac{\text{S. af}}{\text{Sg. af}} \cdot \text{Cof h}$$

$$= \text{Sg. ga} \frac{\text{Br. af}}{\text{Sg. af}}$$

$$= \frac{\text{Sg. ga}}{\text{Sg. af}} \cdot \text{Br. af.}$$

XIX. Weil

$$\text{Sg. af} = \frac{\text{S. af}}{\text{Cot i}} \quad (117, 6)$$

So iſt

$$\text{Lg. a}\beta = \text{Sg. ga} \times \frac{\text{S. af} \cdot \text{fin h}}{\text{S. af} : \text{Cot i}} \quad \text{(XVII)}$$

$$= \text{Sg. ga} \cdot \text{fin h Cot i}$$

$$\text{Br. a}\beta = \text{Sg. ga} \frac{\text{S. af} \cdot \text{Cof h}}{\text{S. af} : \text{Cot i}} \quad \text{(XVIII)}$$

$$= \text{Sg. ga} \cdot \text{Cof h} \cdot \text{Cot i}$$

XX. Und da

$$\text{Sg. ga} = \text{S. ga} \cdot \text{Tg I}$$

So erhält man auch (XIX)

$$\text{Lg. a}\beta = \text{S. ga Tg I} \cdot \text{Cot i fin h}$$
$$\text{Br. a}\beta = \text{S. ga Tg I Cot i Cof h}$$

XXI. Nun giebt

$$\text{Lg. } g\alpha + \text{Lg. } a\beta = \text{Lg. } g\beta \quad (131)$$
$$\text{Br. } g\alpha + \text{Br. } a\beta = \text{Br. } g\beta \quad (\text{a. O.})$$

XXII. Nach (XVII, XVIII) hat man

$$\text{Lg. } g\beta = \text{Lg. } g^a + \text{Sg. } g^a \frac{\text{Lg. af}}{\text{Sg. af}}$$

$$\text{Br. } g\beta = \text{Br. } g^a + \text{Sg. } g^a \frac{\text{Br. af}}{\text{Sg. af}}$$

XXIII. Nach (XX) ist

$$\text{Lg. } g\beta = \text{Lg. } g^a + \text{S. } g^a \, \text{Tg I Coti sin h}$$
$$\text{Br. } g\beta = \text{Br. } g^a + \text{S. } g^a \, \text{Tg I Coti Cos h}$$

und, wenn der ga Streichen $= H$ gesezt wird (I)

$$\text{Lg. } g\beta = \text{S. } g^a (\sin H + \text{Tg I. Coti sin h}) \quad [125]$$
$$\text{Br. } g\beta = \text{S. } g^a (\text{Cos } H + \text{Tg I Coti Cos h})$$

XXIIII. Da nun Lg. gβ und Br. gβ bekannt (XXI, XXII); So hat man, wenn das zu suchende Streichen $= \gamma$,

$$\text{Tg } \gamma = \frac{\text{Lg. } g\beta}{\text{Br. } g\beta} \quad (128).$$

XXV. Nach (XXII) fände sich

$$\text{Tg } \gamma = \frac{\text{Lg. } g^a + \text{Sg. } g^a \frac{\text{Lg. af}}{\text{Sg. af}}}{\text{Br. } g^a + \text{Sg. } g^a \frac{\text{Lg. af}}{\text{Sg. af}}}$$

$$= \frac{\text{Sg. af . Lg. } g^a + \text{Sg. } g^a \text{ . Lg. af}}{\text{Sg. at . Br. } g^a + \text{Sg. } g^a \text{ . Br. af}}$$

XXVI.

XXVI. Nach (XXIII) erhielte man

$$\text{Tg } \gamma = \frac{\text{sin H} + \text{Tg I Cot i sin h}}{\text{Cos H} + \text{Tg I Cot i Cos h}}$$

XXVII. Exempel für (XXIV)

Es sey

Sg. ga = 15, 307 Achtellr.
Sg. af = — 31, 542 " (113. §.)
Lg. ga = 87, 195 "
Lg. af = — 23, 801 " (123. §.)
Br. ga = 36, 755 "
Br. af = 18, 263 "

So ist um nach (XVII und XVIII) die Länge und Breite von aß zu finden

log Lg. af = 1, 3765952
log Sg. ga = 1, 1848901

2, 5614853
log Sg. af = 1, 4988892

log Lg. aß = 1, 0625961

Giebt Lg. aß = 11, 550 Achtellr., und zwar positiv, weil der Quotient $\frac{14,307 \times -23,801}{-31,542}$ bejaht wird.

Ferner:

log Br. af = 1, 2615721
log Sg. ga = 1, 1848901

2, 4464622
log Sg. af = 1, 4988892

log Br. aß = 0, 9475730

Giebt Br. $\alpha\beta = 8,8628$ Achtellr. und zwar negativ, weil der Quotient $\frac{15,307 \times 18,263}{} = 31,541$

(XVIII) verneint wird.

Nun ist

$$\text{Lg. ga} = 87,197$$
$$\text{Lg. a}\beta = 11,550$$

Also

$$\text{Lg. g}\beta = 98,745;$$

Ferner:

$$\text{Br. ga} = 36,955$$
$$\text{Br. a}\beta = -8,863$$

Folglich

$$\text{Br. g}\beta = 28,092:$$

Also hat man

$$\frac{\text{Lg. g}\beta}{\text{Br. g}\beta} = \frac{98,745}{28,092}$$

Oder

$$\text{Tg}\,\gamma = 3,5151$$

Folglich

$$\gamma = 74^\circ\ 7'$$
$$= 4^h\ 14^\circ\ 7'$$

XXVIII. Nach diesem Exempel fallen beyde Linien von a weg, oder ga ist steigend und af fallend. Stiegen nun beyde von a aus, oder wäre ga fallend und af steigend: So wäre nach XXVII

$$\text{Sg. ga} = -15,307$$
$$\text{S. af} = 31,542$$
$$\text{Lg. ga} = -87,195$$

lg. af = 23, 801
Br. ga = — 36, 955
Br. af = — 18, 263;

und man fände gleichfalls $\gamma = 74° 7'$, wenn man nach XXVII die Berechnung wirklich anstellt.

B) Wenn eine der beyden Linien af, ag von a weg steigt und die andere fällt; oder beyde Linien ga, af, steigen oder fallen.

XXIX. In diesem Falle nimmt man das Entgegengesezte der nach (I) gefundenen Seigerteufe, Länge und Breite der einen Linie, z. E. ga, und verfährt übrigens wie für A) (172).

§. 174.
Aufgabe.

Aus den gegebenen Dingen der vorigen Aufgabe (173), der Gangesebne Neigung zu finden.

Auflösung.

1) Durch Zeichnung.

1) Man fälle von a auf dem Durchschnitt der Gangesebne mit der durch g gelegten söhligen Ebne, das Loth ad, und ziehe αd:

So ist $ad\alpha$ des Ganges Ebne Neigung (G. II. Th. 1. Erkl. und §. 155); welche = F seyn mag; und $\alpha d = a\alpha$ Cot F.

Denn der Winkel $a\alpha d = R$ (Geom. II. Th. 1. Erkl. und §. 170); daher das Δ $a\alpha d$ rechtwinklicht; folglich

$$1 : a\alpha = \text{Cot } F : \alpha\delta$$

(eb. Tr. 5. Erkl.).

Für $a\alpha = 1$, ist $\alpha\delta = \text{Cot } F$.

II. Man verzeichne also die (§. 173, I) abgezogenen Linien ga, af im Grundriß; und suche nach vorigen §. IV ꝛc. der Gangesebne Streichen, welches also die söhlige Linie $\beta\gamma$ (die durch den Endpunct g der Sohle der Linie ag, die die größte Eg. hat, geht) haben wird.

III. Von α (wo die verzeichneten Linien einander schneiden) zieht man auf βg eine winkelrechte Linie $\alpha\delta$, welche die Cotangente der Gangesebne Neigung F ist (I).

IV. Mißt man diese auf einem tausendtheiligen Maasstabe, den man aber bey der Verzeichnung (II) im Grundriß, gebraucht haben muß:

So erhält man $\alpha\delta$ durch eine Zahl ausgedruckt, die man folglich in den trigonometrischen Tafeln auffucht; des daneben stehenden Winkels Ergänzung zu 90° wird das gesuchte F seyn (III).

2) Durch Rechnung.

V. Hier muß man den Winkel $\alpha g\beta$ oder $\alpha\beta g$, wissen.

Man kann ihn nach §. 103. finden, weil der Linien αg, $\alpha\beta$ Streichen bekannt ist (173, I) und das von $g\beta$, oder βg gefunden werden kann (173, 65).

VI.

VI. Gesezt also man hätte den Winkel $\alpha\beta g = d$;

Nun ist auch der Winkel $\alpha\beta\delta = i$ (171; 173 I) bekannt.

VII. Man mache (Fig. XXXIX) $\beta A = \beta D$, $= \beta a$, und beschreibe damit aus β die Bogen aD, DA, aA:

So entstehr ein bey A rechtwinklichtes Kugeldreyeck, in welchem man die Hypothenuse $aD = i$, und die Grundlinie $DA = d$ (VI; sphärische Tr. 1. Erkl. 1. Zus.) weiß, und der sphärische Winkel $aDA = F$, des Gangesebne Neigung ist (sph. Tr. a. O.).

VIII. Diesen Winkel F zu finden geschieht durch die Proportion, die in der Tafel der rechtwinklichten sphärischen Dreyecke beym 12. Falle steht.

Sie ist nach dem dortigen Zeichen ausgedruckt

$$r : \text{Cot } PB = \text{tg } BA : \text{Col } B.$$

Der Kürze wegen sey $r = 1$; so ist

dort	r	PB	BA	B
hier	1	$Da = i$	$DA = d$	$aDA = F$

Also hat man

$$1 : \text{Cot } i = \text{Tg } d : \text{Col } F$$

Folglich

$$\text{Col } F = \text{Tg } d \,.\, \text{Cot } i,$$

IX. Da

$$= \text{Cot } i = \frac{\text{Col } i}{\text{sin } i}$$

$$= \frac{\text{af} \,.\, \text{Cof i}}{\text{af} \,.\, \text{fin i}}$$

$$= \frac{\text{S. af}}{\text{Sg. af}} \text{ ;}$$

So ist auch

$$\text{Cot i fin h} \text{ *)} = \frac{\text{S. af}}{\text{Sg. af}} \,.\, \text{fin h}$$

$$= \frac{\text{Lg. af}}{\text{Sg. af}}$$

und

$$\text{Cot i} \,.\, \text{Cof h} = \frac{\text{S. af} \,.\, \text{Cof h}}{\text{Sg. af}}$$

$$= \frac{\text{Br. af}}{\text{Sg. af}}$$

X. Folglich

$$\text{Cot i} = \frac{\text{Lg. af}}{\text{Sg. af} \,.\, \text{fin h}}$$

$$= \frac{\text{Br. af}}{\text{Sg. af} \,.\, \text{Cof h}}$$

XI. Also ist auch

$$\text{Cof F} = \frac{\text{S. af}}{\text{Sg. af}} \,.\, \text{Tg d}$$

$$= \frac{\text{Lg. af} \,.\, \text{Tg d}}{\text{Sg. af} \,.\, \text{fin h}}$$

*). (§. 173. XV.)

$$= \frac{\text{Br. af . Tg d}}{\text{Sg. af . Cof h}}$$

XII. Aus eb. Tr. 5. S. hat man in dem rechtwinklichten Dreyecke $\alpha\delta\beta$

$$1 : \alpha\beta = \sin d : \alpha\delta$$

Aber

$$\alpha\delta = \alpha a \,.\, \text{Cot F} \quad (I)$$
$$\left.\begin{aligned}\alpha\beta &= \alpha a \,.\, \text{Cot i} \\ &= \text{Sg. ga Cot i}\end{aligned}\right\} (171)$$

Also

$$1 : a\alpha, \,.\, \text{Cot i} = \sin d : \alpha a \,.\, \text{Cot F}$$

oder

$$1 : \text{Cot i} = \sin d : \text{Cot F}$$

Folglich

$$\text{Cot F} = \text{Cot i} \sin d$$
$$= \frac{\text{S. af}}{\text{Sg. af}} \,.\, \sin d$$
$$= \frac{\text{Lg. af . sin d}}{\text{Sg. af sin h}}$$
$$= \frac{\text{Br. af . sin d}}{\text{Sg. af . Cof h}}.$$

XIII. Man kann also nach (VIII) so wohl als nach (XI, XII) der Gangesebne Neigung berechnen.

XIIII. Wenn eine der beyden Linien af, ag, (Fig. XXXV, XXXVI) söhlig ist; z. E. ag; so hat diese eben das Streichen, das die Ebne afg hat (152); und aus der Linie af, die nicht söhlig ist, ihrer Länge (23), und Seigerteufe kann man

beurtheilen, ob die afg von a weg gegen Morgen oder Abend steigt oder fällt.

Denn fällt af gegen Abend, so fällt auch von a weg, dahin zu die Ebne afg; der af Seigerteufe ist fallend, und f liegt auf der Westseite der Magnet- oder Mittagsebne; daher Lg. af westlich.

Steigt af gegen Morgen; so hat nicht nur die Ebne afg von a auß gegen Morgen ihr Aufsteigen; sondern Sg. af ist auch steigend; f liegt nun auf der Ostseite, und hat also eine östliche Länge.

So verhält es sich auch nmgekehrt.

Ist keine der beyden Linien af, ag, söhlig; so kann man alles das eben so aus der Länge und Seigerteufe von af sowohl als ag, beurtheilen.

Auf diese Art also kann man sehen, ob des Ganges Ebne afg von a weg recht oder widersinnig fällt.

Wenn $d = o$; so erhält man Cos F und auch Cot $F = o$; daher $F = 90°$ und des Ganges Ebne fällt alsdann seiger.

§. 175.

Lehrsatz.

Wenn die vier Puncte a, g, b, c (Fig. XL) auf einer Ebne so gegeben wären, daß man nur von g bis a, und von b bis c, aber nicht von a bis b, oder g bis c, einen Zug verrichten könnte:

So kann man das Streichen und den Neigungswinkel der durch diese Puncte laufende

de Ebne völlig so wie im 173. und 174. §., finden.

Beweis.

Denn man denke sich $\alpha\beta'$ der $b\beta$ parallel, also b in a, und $b\beta$ in der Lage $a\beta$; so ist dieser Fall, auf die in angeführte Paragraphen gebracht.

§. 176.

Anmerkung.

Noch andere Arten der Bestimmung des Streichens und Fallens der Gangesebne findet man in Herrn Hofr. Kästners Markscheidek. 24. bis 26. Anmerk. Herrn v. Oppels Markscheidek. 2. Th. 2. Hauptstück, u. a.

XIV.

Kreutzlinie.

§. 177.

Erklärung.

Zweer Gangesebnen Durchschnitt, heißt ihre **Kreutzlinie** (linea sectionis).

§. 178.

Aufgabe.

Aus dem Streichen und Fallen zweer Gangesebnen, das Streichen und die Neigung ihrer Kreutzlinie zu finden.

Auflösung.

I. Eine [ABC, (Fig. XLV, XLVI)] von diesen Ebnen heisse die Hauptgangesebne, die andere (ABD) die Nebengangesebne.

II. Jener
Streichen sey = γ
Fallen = Φ
Dieser ihr
Streichen = γ′
Fallen = Φ′.

III. Nun schneiden beyde Ebnen einander in AB, (daß also AB ihre Kreuzlinie [177]), und die durch A laufende söhlige Ebne in AC und AD, wo also der AC Streichen = γ und der AD ihres = γ′ (152).

IV. Hierdurch aber ergiebt sich, wenn man von A aus, auf diesen Linien gleiche Längen nimmt, das Kugeldreyeck BDC.

V. In demselben weiß man
BDE = Φ′
BCD = Φ,
wenn beyde Gangesebnen, (wie Fig. XLV) nach verschiedenen Gegenden fallen; Geschieht dieß aber nach einerley Gegend, (wie Fig. XLVI); so ist
BCD = 180° — Φ;
Auch ist darinne
CD = CAD,
bekannt, indem man diesen Winkel (so = a seyn mag) nach §. 103. aus γ und γ′ findet, da man allezeit leicht wissen kann, ob AC und AD beyde östliches oder westliches, oder die eine östliches und die andere westliches Streichen haben.

VI. Man ziehe auf die gegebene Seite CD, oder dessen

dessen Verlängerung (Fig. XLVI) den Bogen BE senkrecht, und nenne ihn α.

Er mißt der Kreuzlinie AB Neigung.

VII. Es heisse

$$DE\ (=DAE) = m'$$
$$EC\ (=CAE) = m,$$

(wo also m der Hauptgangesebne zugehört, und den Winkel mißt, den der Kreuzlinie AB Sohle AE mit AC, dem Durchschnitte dieser Ebne mit der durch A gehenden söhligen macht; m' aber, gehört der Nebengangesebne und mißt den Winkel den AE mit dem Durchschnitte AD dieser Ebnen und der söhligen einschließt.):

So ist, wenn beyde Gangesebnen nach verschiedenen Gegenden fallen (Fig. XLV)

$$m = a - m'$$

Fallen sie hingegen nach einer Seite zu; So hat man

$$m = m' - a.$$

VIII. Also überhaupt

$$m = \pm a \mp m'$$

wo die obern Zeichen für den ersten Fall, die untern aber für den zweyten, gelten.

IX. Um m' zu finden, sehe man in jedem der beyden rechtwinklichten Dreyecke BEC, BED, die Grundlinien als bekannt an, und suche, aus dem, in jedem gegebenen, schiefen Winkel, die, beyden gemeinschaftliche, Höhe.

X. Dieß geschieht nach sphärischer Trigonometrie I. Satzes II. Proportion; und man erhält

$$\text{tang } \alpha = \text{tang } \Phi' \text{ sin } m'$$
$$= \text{tang } \Phi \text{ sin } m.$$

XI. Aber wenn beyde Ebnen, nach verschiedenen Gegenden fallen; so hat man

$$\text{tg } \Phi \text{ sin } m = \text{tg } \Phi \text{ sin } (a - m') \text{ (VII).}$$

XII. Nun ist

$$\text{sin } (a - m') = \text{sin } a \text{ Cos } m' - \text{Cos } a \text{ sin } m' \text{ (eb. Tr. 19. S.)}$$
$$= \text{sin } a \text{ Cos } m' \frac{\text{sin } m'}{\text{sin } m'} - \text{Cos } a \text{ sin } m'$$
$$= (\text{sin } a \text{ Cot } m' - \text{Cos } a) \text{ sin } m'.$$

XIII. Also

$$\text{tg } \Phi' \text{ sin } m' = \text{tg } \Phi \text{ sin } m' (\text{sin } a \text{ Cot } m' - \text{Cos } a) \text{ [X, XI, XII]}$$

Folglich

$$\text{tg } \Phi' = \text{tg } \Phi (\text{sin } a \text{ Cot } m' - \text{Cos } a)$$
$$= \text{tg } \Phi \text{ sin } a \text{ Cot } m' - \text{tg } \Phi \text{ Cos } a$$

XIV. Mithin

$$\frac{\text{tg } \Phi' + \text{tg } \Phi \text{ Cos } a}{\text{tg } \Phi \text{ sin } a} = \text{Cot } m'$$

Oder

$$\text{Cot } m' = \frac{\text{tg } \Phi'}{\text{tg } \Phi \text{ sin } a} + \text{Cot } a.$$

XV. Wenn beyde Ebnen nach einer Seite fallen; so hat man (X)

tg Φ

$\text{tg}\,\Phi \sin m = -\text{tg}\,\Phi \sin(m' - a)$ [V,VII]

und man erhält Cot m′ wie in (XIV).

XVI. Hat man auf die Art (XIV) m′ gefunden, so findet sich (VIII) m.

XVII. Aber aus m′ und γ′ oder m und γ, erhält man nach §. 105. der Linie AE, und folglich der Kreuzlinie AB Streichen und dessen Beschaffenheit.

XVIII. Nachdem m′ oder m gefunden, kann man nach (X) der Kreuzlinie AB Neigung α berechnen.

XIX. Widersinnig fallender Gangesebne Neigungen, werden nach §. 157, durch stumpfe Winkel ausgedruckt.

Ist dieß nun der Fall bey beyden oder einer der vorgegebenen; so kommen bey Findung m′ (XV) stumpfe Winkel in Betrachtung.

Mit diesen ihren trigonometrischen Linien wird man schon aus der eb. Tr. umzugehen wissen.

XX. Findet man der Kreuzlinie Neigungswinkel α stumpf; so fällt sie widersinnig (156, 157), sonst recht.

§. 179.

Zusatz.

Wenn $\gamma' = \gamma$; so ist $a = 0$; und beyder Ebnen ABC, ABD, Durchschnitte AC, AD mit der söhligen Ebne durch A, sind parallel; und man

muß

muß sich daher A, als unendlich weit entfernet vorstellen.

In diesem Falle aber ist auch m′ und $\alpha = 0$; Also AB söhlig und mit AC und AD, gleichlaufend.

§. 180.
Zusatz.

Wenn

$$\Phi' = \Phi = 90°;$$

so ist

$$tg\,\Phi = \infty = tg\,\Phi',$$

und daher auch tang α: Folglich $\alpha = 90°$; also die Kreuzlinie seiger, und hat folglich kein Streichen.

§. 181.
Zusatz.

I. Wenn

$$a = 90°,$$

also beyder Ebnen Streichen um 6 Stunden verschieden; so ist

$$Cot\ m' = tg\,\Phi'\ Cot\,\Phi$$

Ist nun

$$\Phi = 90°$$

so wird

$$Cot\ m' = 0$$

Folglich

$$m' = 90°$$

Und also

$$tang\ \alpha = tang\ \Phi',$$

II. Wäre

$$\Phi' = 90°;$$

So würde

$$\text{Cot } m' = \infty$$

Folglich

$$m' = 0$$

Also

$$m = a \text{ (178, VIII)}$$
$$= 90° \text{ (I)}$$

Mithin

$$\text{tang } \alpha, (= \text{tang } \varphi \text{ sin } m) = \text{tang } \Phi$$

III. Wenn also das Streichen beyder vorgegebenen Gangesebnen um 6 Stunden verschieden, (oder mit einander in ihrem Streichem das Winkelkreuz machen,) und der einen Neigung $= 90°$ (oder seiger fällt); so ist ihrer Kreuzlinie Streichen, einerley mit dem der seigerfallenden Ebne, und ihre Neigung eben dieselbe mit der der flachfallenden.

§. 182.

Aufgabe.

Man weiß das Streichen γ', γ zwoer Gangesebnen; also auch a (178, V);

Imgleichen das Streichen und Fallen α ihrer Kreuzlinie:

Man sucht der Gangesebnen ABD, ABC (Fig. XLV, XLVI) Neigungswinkel Φ', Φ.

Auflösung.

Aus der Kreuzlinie Streichen, und γ' läßt sich m' finden (103):

Also

Also weiß man auch m (178, VIII).

Aber

$$\left.\begin{aligned} \text{tg } \alpha &= \text{tg } \Phi' \sin m' \\ &= \text{tg } \Phi \sin m \end{aligned}\right\} (178, X)$$

Folglich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\text{Cot } \alpha} &= \frac{1}{\text{Cot } \Phi'} \sin m' \\ &= \frac{1}{\text{Cot } \Phi} \sin m \end{aligned}\right\} \text{(eb. Trig. 5. Erkl. 1. Z.)}$$

Also

$$\text{Cot } \Phi' = \text{Cot } \alpha \sin m'$$
$$\text{Cot } \Phi = \text{Cot } \alpha \sin m.$$

§. 183.

Aufgabe.

Aus den im vorigen §. gegebenen Dingen, die Winkel BAC = n, und BAD = n', zu finden, die die Durchschnitte der Haupt- und Nebengangesebne mit der durch A gehenden söhligen Ebne, und ihre Kreuzlinie einschliessen.

Auflösung.

In den beyden bey E. rechtwinklichten Kugeldreyecken BEC, BED (178, VI) ist

$$BC = n$$
$$BD = n'$$

und wird also gesucht;

Ferner ist darinne

$$BE = \alpha$$

CE

$CE = m$
$ED = m'$

bekannt. Und man hat nach sphär. Trig. 1. S. 3. Zus. III. Proport.

$$\text{Cos } n = \text{Cos } m \cdot \text{Cos } \alpha$$
$$\text{Cos } n' = \text{Cos } m' \cdot \text{Cos } \alpha$$

§. 184.
Zusatz.

Wäre

BDE oder Φ'

und

DE oder m'

gegeben; so hätte man nach a. O. V. Proport.

$$\text{Cot } n' = \text{Cos } \Phi' \text{ Cot } m'$$

Eben so für bekannte Φ und m

$$\text{Cot } n = \text{Cos } \Phi \text{ Cot } m$$

Man hat auch

$$\text{tang } n' = \frac{\text{tang } m'}{\text{Cos } \Phi'}$$

$$\text{tang } n = \frac{\text{tang } m}{\text{Cos } \Phi} \text{ (a. O. VIII. Prop.)}$$

§. 185.
Zusatz.

Aus

$BCD = \Phi$
$DC = a$
$DB = n'$

findet man vermöge sphär. Trig. 3. Satzes, den Winkel DBC, den beyde Gangesebnen mit einander machen, durch

$$\sin DBC = \frac{\sin \Phi \cdot \sin a}{\sin n'}$$

Auch aus

$BC = n'$
$BDC = \Phi'$
$DC = a$

findet man nach a. Satze

$$\sin DBC = \frac{\sin \Phi' \sin a}{\sin n}.$$

§. 186.

Aufgabe.

Es sind gegeben:

Das Streichen γ', γ und die Neigungen Φ', Φ der Gangesebnen CD, FD (XLVII Fig.);

Ueberdieß auf denselben zween Puncte A, B,:

Man soll einen Punct a, der Kreuzlinie finden, der mit einem, A, der beyden gegebenen in einer söhligen Ebne liegt.

Auflösung.

I. Man stelle sich durch A eine söhlige Ebne gelegt vor:

So schneidet diese die Kreuzlinie DE in dem gesuchten Puncte a;

Ferner die Ebne DC, DF in Aa, aB', daß also Aa mit DC, und aB' mit DF einerley Streichen hat.

II. Ziehe

II. Zieht man nun von A bis B; so findet sich nach §. 136 der Linie AB Sohle AB′, und deren Streichen.

III. Nun läßt sich nach §. 103. aus der Linie aA, aB′ Streichen (I)

der W. AaB′ = a

der Linien AB, Aa Streichen

aAB′ = A,

und der Linie B′A, B′a Streichen

AB′a = B′

berechnen.

IV. Aber nach eb. Tr. 10. S. hat man

$$Aa = \frac{S.\ AB\ .\ \sin B'}{\sin a}$$

$$= \frac{S.\ AB}{\sin a}\ .\ \sin B'$$

$$B'a = \frac{S.\ AB\ .\ \sin A}{\sin a}$$

$$= \frac{S.\ AB}{\sin a}\ .\ \sin A.$$

§. 187.

Anmerkung.

Die Aufgabe in §. 178. erwähnt der Herr von Oppel in 618. §. seiner Markscheidekunst, hat aber von ihr keine Auflösung gegeben; — vielleicht weil er sie für die meisten Markscheider zu schwer hielte, denen die sphärische Trigonometrie, wie die

ganze Mathematik, ganz erschrecklich vorkommt. —

Herr Hofr. Kästner hat in seiner Markscheidekunst 30. Anm. von ihr eine vollständige Auflösung gegeben, und mit Exempeln erläutert; welche wir mit einiger Veränderung vorgetragen haben.

XV.

Ausstreichen.

§. 189.

Erklärung.

Von einem Gange der durch die Oberfläche des Berges, oder Gebürges, sezt, sagt man: **Er streiche zu Tage aus**; und nennt das, was er mit der Gebürgesoberfläche gemein hat sein **Ausstreichen, Ausgehendes** (caput).

§. 190.

Zusatz.

Des Ganges Ebne Ausstreichen oder Ausgehendes ist also eine Linie (G. II. 2. Erkl. Zus. Anm.)

Diese nun, kann söhlig, auch gegen den Horizont oder eine söhlige Ebne geneigt d. i. donlegig, seyn, nachdem des Ganges Ebne des Gebürges Oberfläche schneidet.

Denn man stelle sich durch eines Berges Oberfläche eine söhlige Ebne gelegt vor; so ist des Ganges Ebne Ausstreichen söhlig, wenn es mit der söhligen Ebne parallel läuft, sonst donlegig.

Allemal aber ist da das Ausstreichen söhlig, wo

es

es durch einen söhligen Theil genannter Oberfläche geht.

§. 191.
Zusatz.

Wenn man sich durch eines Ganges Ebne LB donlegiges Ausstreichen, AL (Fig. XLI.) eine seigere Ebne GI vorstellt; so hat diese und jede söhlige Linie AI in ihr mit dem donlegigten Ausgehenden eines und dasselbe Streichen (20). Dieses ist aber nicht das Streichen der Gangesebne.

Denn die seigere Ebne GI ist nicht des Ganges Ebne LB, auch nicht ihr parallel; daher sind beyder Ebne GI. LB Durchschnitte AI, AB, mit einer söhligen Ebne AD, nicht nothwendig parallel.

§. 192.
Anmerkung.

Der Satz des vorigen §. findet sich auch in Hn. v. Oppels Markscheidekunst, 565. §. aber ohne Beweis.

Herr Hofr. Kästner, hat in seiner Markscheidekunst 23. Anm. 15, den Beweis auseinander gesezt, welchen ich hier mit einiger Veränderung aufgestellt habe.

Dieß zu thun schien mir nicht überflüßig; denn man sieht daraus, daß das Ausgehende nur alsdenn mit dem Gange einerley Streichen hat, wenn er des Berges oder Gebürges Oberfläche in einer söhligen Linie schneidet;

§. 193.
Anmerkung.

I. Um die Lage des Ausgehenden bestimmen zu

können, muß man den Theil des Berges oder Gebürges Oberfläche, wodurch der Gang streicht, als eine gegen den Horizont oder eine söhlige Ebne geneigte Ebne ansehen.

II. Man muß hierauf den Winkel wissen, den diese leztere Ebne mit der söhligen macht; also ihre Neigung, oder, wie man hier gemeiniglich spricht: ihr Ansteigen.

III. Ueberhaupt bestimmt man das Ansteigen eines Gebürges, oder auch nur Berges, wenn man seinen Abhang, Abfall, sein Gehänge, d. i. der Theil des Gebürges oder Berges Oberfläche zwischen dem Fuße und obersten Theile des Gebürges, als eine geneigte Ebne ansieht, und der ihre Neigung angiebt.

Hiebey sagt man: das Gebürge habe sein Ansteigen gegen Abend oder Morgen, nachdem die Linie des Fallens izt genannter Ebne, der Ebne des Ansteigens, von dem Durchschnitte mit der söhligen Ebne (II) weg, gegen Osten oder Westen streicht.

Das Streichen dieser Ebne wird ebenfalls, wie §. 152. erfodert, geschäzt; Nämlich nach dem Streichen jeder söhligen Linie in ihr.

IV. Die Neigung der Ebne des Ansteigens zu bestimmen, könnte man in ihr zween Puncte so annehmen, daß wenn man durch den einen eine söhlige Ebne legte, die Linie zwischen diesen Puncten

auf

auf dem Durchschnitte beyder Ebnen senkrecht stünde, oder die Linie des Fallens wäre.

Würde nun von dem einen zum andern ein Zug verrichtet: So fände man dadurch nach §. 136. dieser Linie Streichen und Neigung.

Diese würde gleich der Ebne des Ansteigens Neigung, das Streichen aber von dem genannter Ebne um 6 Stunden verschieden seyn.

§. 194.

Aufgabe.

Das Streichen und Fallen einer Gangesebne sowohl als der Ebne des Ansteigens, ist gegeben;

Man sucht das Streichen und den Neigungswinkel der Gangesebne Ausgehenden.

Auflösung.

Nach vorigen §. sieht man, daß diese Aufgabe mit der im 178. §. übereinkommt, und also die dortige Auflösung hier völlig ihre Anwendung findet, so bald man sich unter der einen der dortigen Gangesebnen, die Ebne des Aufsteigens denkt.

§. 195.

Aufgabe.

Es ist eine söhlige Ebne DE (Fig. XLII.) gegeben, auch über oder unter derselben ein Punct A, in der Gangesebne GH, deren Streichen β und Fallen φ bekannt:

Man soll einen Punct, C, des Durchschnitts FG der Gangesebne mit der söhligen DE angeben.

Auflösung.

I. Man gebe nach §. 149. in der söhligen Ebne einen Punct B an, der seiger über A liegt.

II. Dadurch läßt sich zugleich, weil B und C in einer und derselben söhligen Ebne liegen, und also gleich große Entfernung, von der durch A laufenden söhligen Ebne haben, des Puncts C oder der Linie AC Seigerteufe Ca, die gleich h seyn mag, finden.

III. Zieht man von B in der söhligen Ebne DE eine Linie BC, die ein Streichen hat, daß von dem des Ganges um 6 Stunden unterschieden ist; so wird diese FG in C schneiden.

Der BC Streichen aber ist östlich oder westlich, nach dem für A unter DE des Ganges Ebne von A weg gegen Morgen oder Abend aufsteigt, oder für A über DE von diesem Puncte aus gegen Morgen oder Abend fällt.

IV. Nun muß man die Größe von BC wissen.

Da aber BC, welches = a seyn mag, auf FG senkrecht; so ist der

W. BCA = Φ (Geom. II. Th. 2. Erkl.)

überdieß hat man

BA = h

Also in dem bey B rechtwinklichten Dreyecke ABC

$$1 : h = \text{Cot } \Phi : CB$$

Folglich

$$a = h \times \text{Cot } \Phi.$$

§. 196.
Anmerkung.

Wäre die söhlige Ebne DE über Tage, auf des Gebürges Oberfläche gegeben; so fände man nach vorigen §. einen Punct C des Ganges Ebne Ausstreichen FG.

In so ferne man den Theil des Gebürges Oberfläche, worinne C liegt, als söhlig annehmen kann; so giebt ein durch C in dem Streichen des Ganges abgesteckte Linie, oder vielmehr seigere Ebne, das Ausgehende an.

Ist dieser Theil der Oberfläche donlegig: so wird man sich schon bey Angebung des Ganges Ausstreichen durch den 194. §. zu helfen wissen.

Uebrigens will ich hier noch anmerken, daß bey diesen und ähnlichen Verrichtungen der Markscheider wegen der Erinnerung §. 163. sich mit der Bedingung verwahren muß: **Wenn der Gang sein Streichen und Fallen behält**

§. 197.
Anmerkung.

I. Der 194. §. dient auch einen Punct C anzugeben, von dem weg auf dem Gange ein Schacht gesunken, oder ein Ueberhauen ꝛc. betrieben werden soll, so daß man damit in einen gegebenen Punct A, durchschlägig werde.

II. Um aber zu wissen, wie weit von C bis A sey, muß man aus Φ und h des 195. §. die Größe von CA, welche des von C nach A zu sinkenden Schachts flache Tiefe heißt, bestimmen.

III. Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyecke CBA der

$$\text{Winkel ACB} = \Phi$$

und

$$AB = h;$$

also bekannt; daraus findet sich nach eb. Tr. 6. S. für den Sinustotus = 1,

$$CA = \frac{h}{\sin \Phi}$$

$$= h \,.\, \text{Cosec}\, \Phi.$$

IV. Wäre a und Φ (195) bekannt; so hätte man

$$CA = \frac{a}{\text{Cos}\, \Phi} \text{ (eb. Tr. a. O.)}$$

$$= a \,.\, \text{sec}\, \Phi.$$

V. Wären a und h (195) gegeben; so hätte man

$$CA = \sqrt{(h^2 + a^2)}$$

Oder, da

$$\frac{h}{a} = \text{Tg}\, \Phi$$

kann man auch CA nach III oder IV, finden.

§. 198.

Aufgabe.

Es ist gegeben:

Das Streichen β einer Gangesebne LB (Fig. XLI.); Auch das

das Streichen γ und Neigung α des Ausgehenden AL, der Gangesebne LB.

Man soll daraus dieser Ebne Neigung Φ finden.

Auflösung.

I. Die söhlige Ebne AD durch A, schneide des Ganges Ebne LB in AB;

So hat AB mit LB einerley Streichen (152).

II. Diese söhlige Ebne DA, werde ferner, von der durch AL gehenden seigern Ebne in AM geschnitten;

So ist

$$LAM = \alpha,$$

und AM hat mit AL einerley Streichen (20).

III. Man weiß also den Winkel MAB, (der $= \mu$ seyn mag,) den die söhligen Linien AB, AM einschliessen (I, II, und 103).

IV. Man mache $AK = AM$, $= AL$, und beschreibe damit aus A die Bogen LM, MK, LK;

So entsteht ein rechtwinklichtes Kugeldreyeck, (sphär. Tr. 1. Erkl. 3. Z. und I, II) in dem

$$LM = \alpha$$
$$MK = \mu$$

bekannt, und

$$LKM = \Phi$$ (a. D. 1. Erkl. 1. Z.)

gesucht wird.

V. Dieß geschieht nach der in der Tafel der rechtwinklichten sphärischen Dreyecke beym 2. Falle stehenden Proportion:

$$r : \sin BA = \operatorname{Cot} PA : \operatorname{Cot} B.$$

VI. Man hat also

dort	r	BA	PA	B
hier	1	μ	α	Φ

Folglich

$$\operatorname{Cot} \Phi = \sin \mu \,.\, \operatorname{Cot} \alpha$$

oder (eb. Lr. 5. Erkl. 1. B.)

$$\operatorname{Tg} \Phi = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sin \mu}$$

§. 199.

Zusaz.

Wenn ausser der Lage von AL, der Gangesebne Neigung Φ gegeben; So hat man

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{Cot} \Phi}{\operatorname{Cot} \alpha}$$

oder auch

$$\sin \mu = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \Phi}$$

Auf die Art also findet man μ, und daraus mittelst des 105. §. und der AL Streichen, das der AB, und folglich der Ebne LB.

§. 200.

Die Aufgaben deren Auflösungen der 198. und 199. §. enthält, erwähnt der Herr von Oppel §. 618; hat sie aber nicht aufgelößt, weil er den Vorwurf damahliger Markscheider befürchtete,

tete, die Markscheidekunst mit mathematischen Spitzfindigkeiten, durch die, ihr so brauchbare sphärische Trigonometrie, zu bereichern.

Ausser diesen erwähnt er noch zwo andere davon hier die eine §. 178, die andere aber §. 194. aufgelößt ist.

Herr Hofr. Kästner hat von der in §. 198. §. enthaltenen Aufgabe, zuerst in seiner Markscheidekunst 29. Anm. die Auflösung gegeben; Dabey aber (Seite 191 ꝛc.) auch die im Herrn von Oppels Markscheidebuch §. 619. sich findende Aufgabe vollständiger gelößt, wovon man a. a. O. nachsehen wird.

§. 201.

Aufgabe.

In der Grube ist ein Punct A, (Fig. XLIII, XLIV) etwa vor Ort, gegeben;

Ueberdieß des Ganges Ebne Streichen γ auch Neigungswinkel Φ und ob selbige gegen A zu, oder von A weg, fällt;

Imgleichen das Streichen einer söhligen Linie AE, wo E in des Ganges Ebne liegt:

Man soll die Größe von AE finden.

Auflösung.

I. Es wird vorausgesetzt, daß man von A bis in einen Punct B auf dem Ausstreichen oder sonst auf der Ganges Ebne, ziehen kann.

II. Da-

II. Dadurch findet sich der AB Streichen, Sohle AC, = ſ und Seigerteufe BC = S (136).

III. Nun schneide die durch A gehende söhlige Ebne des Gangesebne in FE.

IV. Man führe darauf BG senkrecht, und ziehe GC;

So ist

$$BGC = \Phi$$ (G. II. Th. 2. Erkl. u. 152).

V. Und

$$GC = S \,.\, \text{Cot}\, \Phi$$ (wenn, [wie allemal angenommen] Sin. tot. = 1)

VI. Aber

$$DC = GC \times \frac{1}{\text{Cof CDE}}$$ (eb. Tr. 6. S.)

$$= \frac{S \,.\, \text{Cot}\, \Phi}{\text{Cof CDE}}$$ (V)

wo der Winkel CDE nach §. 103. aus dem Streichen von AB, und FE, = m berechnet werden kann.

VII. Also hat man

$$DC = \frac{S \,.\, \text{Cot}\, \Phi}{\text{Cof m}}$$

$$= S \,.\, \text{Cot}\, \Phi \,.\, \text{sec m}.$$

VIII. Wenn nun die Gangesebne dem Puncte A zu fällt, wie in der XLIII. Figur; so ist

$$AD = ſ - DC$$

$$= ſ$$

$$= f - \frac{S \cdot \text{Cot } \Phi}{\text{Cof m}}$$

$$= f - S \cdot \text{Cot } \Phi \text{ fec m.}$$

IX. Fällt sie aber von A weg: So ist

$$AD = f + DC$$

$$= f + \frac{S \cdot \text{Cot } \Phi}{\text{Cof m}}$$

$$= f + S \cdot \text{Cot } \Phi \cdot \text{fec m.}$$

X. Also ist überhaupt

$$AD = f \mp DC$$

$$= f \mp \frac{S \text{ Cot } \Phi}{\text{Cof m}}$$

oder

$$AD = f \mp S \cdot \text{Cot } \Phi \cdot \text{fec m}$$

wo das obere Zeichen für den Fall (VIII) und das untere für den (IX) gilt.

XI. Nun kann man nach §. 103. aus dem Streichen von AC und AE,

den W. DAE, = n

finden; Aber nach Geom. 13. S.

den W. DEA = $180° - (n + ADE)$

$= 180° - (n + 180° - m)$

$= 180° - n - 180° + m$

$= m - n.$

XII. Also hat man nach eb. Tr. 10. S.

$\text{fin}(m - n) : \text{fin}(180° - m) = AD : AE$

oder

$\text{fin}(m - n) : \text{fin } m = AD : AE.$

XIII.

XIII. Folglich

$$AE = \frac{AD \,.\, \sin m}{\sin(m - n)} \text{ *)}$$

§. 202.

Zusatz.

Wenn

$$m - n = 90°;$$

So hat man.

$$AE = AD \,.\, \sin m.$$

Ist aber

$$m = 90°;$$

So ist

$$AE = \frac{AD \,.\, m}{\text{Cof } m} \text{ und}$$

$$AD = f \mp S \,.\, \text{Cot } \varphi.$$

§. 203.

Aufgabe.

Es ist eine söhlige Ebne DE (Fig. XLII) gegeben, und auf derselben ein Punct C des Durchschnitts FG mit der Gangesebne, deren Streichen γ und Fallen φ bekannt:

Man soll einen Punct B in DE angeben, von dem weg eine ihrer Größe nach vorgeschriebene seigere Linie BA, $= a$ auf die Gangesebne eintrift.

Auflösung.

1) Von C ziehe man eine söhlige Linie deren Streichen von γ um 6 Stunden unterschieden ist, und

*) Oder auch $AE = \frac{f \,.\, (\sin m \mp \text{tg } m)}{\sin (m - \gamma)}$

und sich von C nach der Gegend erstrecket, wohin der Gang von C fällt, oder sein Hangendes hat:

So liegt offenbar in ihr der anzugebende Punct B.

2) Nun ist in dem rechtwinklichten Dreyeck CBA, der Winkel

$$BCA = \Phi$$

$$BA = a$$

gegeben: Also hat man mittelst eb. Trig. 6. S.

$$CB = a \cdot \operatorname{Cot} \Phi.$$

§. 204.

Anmerkung.

Wäre kein Punct C gegeben, so müßte man nach §. 195. einen suchen, und übrigens wie vorhin verfahren.

§. 205.

Zusatz.

Sollte für ein gegebenes C (203) in der dadurch gehenden söhligen Ebne ein Punct b so bestimmt werden, daß zwar von dem weg eine ihrer Größe nach gegebene seigere Linie = a, die Gangesebne trift, aber auch die zwischen C und b enthaltene söhlige Linie Cb eine fürgeschriebene Stunde β hat: So erhält man die Größe von Cb auf folgende Art.

AD sey der Durchschnitt der söhligen Ebne durch C mit einer durch B laufenden seigern Ebne die das Streichen γ (203) hat: So liegt b offenbar in dieser seigern Ebne.

Nun sey CB senkrecht auf AD; so ist nach §. 203.

$$CB = a \cdot \operatorname{Cot} \Phi$$

Aber nach eb. Trig. 6. S. hat man

$$Cb = \frac{CB}{\sin BbC}$$

$$= \frac{a \cdot \operatorname{Cot} \Phi}{\sin BbC}$$

wo BbC nach §. 103. aus γ und β gefunden wird.

§. 206.

Anmerkung.

I. Im Fall des 204. §. ist auch folgendes Verfahren brauchbar:

II. A sey (Fig. XLIX, L) ein auf des Ganges Saalband unter der gegebenen söhligen Ebne DE, (203) und B in DE nach Gefallen angenommener Punct, doch B so, daß er in der Gegend des Hangenden, oder von dem Durchschnitte der Gangesebne mit DE dahin zu liegt, wohin der Gang fällt.

III. Man denke sich durch A eine söhlige Ebne, und durch B eine seigere, die ein Streichen τ hat, das von dem gegebenen Streichen γ des Ganges um 6 Stunden unterschieden ist.

IV. Diese wird die Gangesebne in Cb, der Linie des Fallens, die gegebene söhlige Ebne DE und die durch A, in BC und IH schneiden:

V. Nun sey von A bis B ein Zug verrichtet: So findet man dadurch des Puncts B Seigerteufe

teufe Bb = h,' in Beziehung auf die durch A laufende söhlige Ebne. (136)

VI. Ueberdieß sey F der gesuchte Punct, also FG die vorgegebene seigere Linie = a (203);

VII. Ist nun h ≥ a (wie Fig. XLIX): So sey GD die Verlängerung von FD an IH (III); also FD = Bb, und GD = Bb — FG = h — a.

VIII. Ist aber g < a (wie Fig. L): So ist GD = FG — Bb = a — h.

IX. Also überhaupt $GD = \pm h \mp a$; welcher Ausdruck in jedem Fall (VII, VIII) = d seyn mag.

X. Nun ist (Fig. XLIX, L) GbD = Φ (203, und IIII;) und nach eb. Trig. 6. S.

$$bD = GD \,.\, \mathrm{Cot}\, \Phi$$
$$= d \,.\, \mathrm{Cot}\, \Phi \text{ (IX)}$$

XI. Aber bD = BF (Geom. 12. S. 3. Z.): Also

$$BF = d \,.\, \mathrm{Cot}\, \Phi$$

XII. Wenn man also von B (II) auf der söhligen Ebne DE (203) eine Linie BF bestimmt, deren Streichen = τ (III) und die so groß als d. Cot Φ: So hat man das Verlangte; Nur muß BF im Fall (VII) östliches oder westliches Streichen haben, nachdem des Ganges Ebne von A gegen Osten oder Westen aufsteigt; Im Fall (VIII) hingegen ist es umgekehrt.

XIII. Hätte man (Fig. LI, wo einerley Buchstaben mit den in der L und XLIX Figur einerley

Bedeutung haben) A über DE genommen, so erhielte man, wie man leicht sieht

$$BF = DF \,.\, \text{Cot}\, \Phi$$
$$= h \,.\, \text{Cot}\, \Phi.$$

XIV. Uebrigens findet man gleiches Verfahren in Herrn v. Oppels Markscheidekunst §. 866, aber nur vorgeschrieben.

§. 207.

Anmerkung.

Soll F so liegen, daß der Linie zwischen B und F ein gegebenes Streichen gehört; so heisse der Winkel, den diese Linie mit einer macht, die des Ganges Streichen hat, $= \lambda$; und man erhält alsdenn

$$BF = \frac{d \,.\, \text{Cot}\, \Phi}{\sin \lambda}$$

welches auf ähnliche Art wie §. 205. erhellet.

Anwendung hiervon sehe man beym Herrn von Oppel §. 867, 868.

XVI.

In wie ferne an zwo Stellen entblößte Gänge für einen gehalten werden können.

§. 208.

Aufgabe.

Man hat an einer Stelle einer Grube eines Ganges Streichen und Neigung gefunden; An einer andern Stelle findet sich von einem

einem Gange eben das Streichen und die Neigung: beyde Gänge aber, sind entweder zugleich recht- oder widersinnig fallend:

Man soll angeben, ob lezterer Gang mit erstern einerley ist.

Auflösung.

I. In der LII. Figur stelle die durch DACB laufende Ebne, die des erstern Ganges, und die Ebne durch PMON, die des andern Ganges, vor.

So ist nach den Bedingungen der Aufgabe klar, daß beyde Ebnen entweder eine und dieselbe, oder einander parallel, sind.

II. Nun sey AB eine söhlige Linie in der erstern Gangesebne und MN eine in der zweyten: Jene in der tiefern Stelle, diese in der höhern.

So haben beyde Linien der ihnen zugehörigen Ebne Streichen: Also einerley Streichen, und sind folglich parallel.

III. Man nehme in AB nach Gefallen einen Punct E an, und verrichte von ihm bis Q, einen Punct in MN, (der also höher als E liegt) einen Zug.

IV. Durch AB denke man sich eine söhlige Ebne, GR; und auf diese sey von Q das Loth QF gezogen; Man ziehe EF:

So ist QF der EQ Seigerteufe und EF ihre Sohle.

V. Beyde (QF, EF) hat man aus dem Zuge (III); auch der EQ oder EF Streichen (136).

Folglich nach §. 103. auch den Winkel FEA den EF mit EA macht.

VI. Man setze

$EF = b$

$QF = h$

$FEA = q$

und beyder Ebnen (I) Neigungswinkel (welche man gleich groß gefunden hat)

$= p$.

VII. Des andern Ganges Ebne schneide die söhlige Ebne durch AB in GH:

So sind GH, AB, MN parallel.

VIII. Auf GH sey QI senkrecht; Man ziehe FI welche auch auf GH senkrecht seyn wird (S. 46. S. 6. Z.), und folglich QIF der Ebne POMN Neigung (Geom. II. Th. 2. Erkl.) also $= p$ (VI).

IX. Folglich (eb. Tr. 6. S.)

$FI = h \cdot \text{Cot } p$.

X. Nun sey FK senkrecht auf AB; so liegen die Puncte K, F, I, in einer und derselben geraden Linie:

Denn FK, FI, sind Perpendikel aus einem Puncte F in der Ebne durch zwo Parallelen AB, GH auf diese Parallelen (VII, VIII, V).

XI. Nach eb. Tr. 3. S. aber hat man

$KF = b \cdot \sin q$.

XII. Nun kann der Punct Q, und folglich auch F, (des Puncts Q Projection auf GR) zwo Lagen haben.

Erste. Beyde können auf der Seite liegen, wohin von E die Ebne CD fällt.

Der Linie EQ und folglich auch der EF Streichen ist also östlich oder westlich, nachdem CD gegen Morgen oder Abend fällt; oder gegen Abend oder Morgen aufsteigt.

Die LII Figur stellt das vor.

Zweyte. Q, oder F, können auf der Seite liegen nach der CD von E aufsteigt.

Wenn also CD gegen Abend oder Morgen aufsteigt; also gegen Morgen oder Abend fällt; so hat EQ oder EF, westliches oder östliches Streichen:

In der LIII Figur ist das dargestellt.

XIII. Bey der ersten Lage ist der Parallelen AB, GH, Abstand

$$KI = KF + FI$$
$$= b \cdot \sin q + h \cdot \operatorname{Cot} p$$

Bey der zweyten hingegen hat man

$$KI = FK - FI$$
$$= b \cdot \sin q - h \cdot \operatorname{Cot} p$$

XIV. Sollen nun beyde Gangesebnen eine und dieselbe also beyde Gänge einer und derselbe, seyn:

So muß GH (VII) in AB zu liegen kommen.

Denn GH liegt mit AB in einer söhligen Ebne und zugleich auch in der Ebne MP, welche mit DC einerley seyn soll (Fig. LIIII).

XV. Weil aber alsdenn Q in der Ebne DC (I) und über der durch AB gehenden söhligen Ebne, ist:

So liegt F nothwendig nach der Seite von AB zu, wohin diese Gangesebne DC aufsteigt, wie in der zweyten Lage (XII).

XVI. Nun sind aber auch I und K nur ein Punct: Also ist

$$FI = IK$$

Folglich

$$FI - IK, \text{ oder } b \,.\, \sin q - h \,.\, \mathrm{Cot}\, p, = 0$$

Also

$$b \,.\, \sin q = h \,.\, \mathrm{Cot}\, p.$$

XVII. Diese Gleichung könnte ebenfalls bey der ersten Lage (XII) statt finden, wenn in der LII Figur F in der Mitte zwischen GH (VII) und AB (II) liegt.

XVIII. Man muß aber aus dem verrichteten Zuge (III) wissen, ob die erste oder zweyte Lage statt findet.

Wie man dieß daraus erfahren kann ist aus (XII) begreiflich.

XVIIII. Ich kann also annehmen, man weiß, daß die zweyte Lage statt findet.

XX. Bekommt man alsdenn die Gleichung

$$b \,.\, \sin q = h \,.\, \mathrm{Cot}\, p \text{ (XVI)}:$$

So zeigt sie folgendes an.

Aus dem Puncte F, (Fig. LIII)' des Puncts Q (III) Projection auf der durch AB gehenden und

des

des andern Ganges Ebne PM in GH schneidende Ebne, so daß sich GH mit AB auf einer und derselben Seite von F befindet, fallen auf AB und GH gleich lange Perpendikel.

Folglich gehen AB und GH in eine einzige gerade Linie zusammen.

Und die beyden Perpendikel auch in ein einziges.

Und die beyden Puncte K, I, in einen einzigen.

Alsdenn entsteht folglich die LIIII. Figur.

XXI. Wenn also die zweyte Lage (XII) und die Gleichung $b \,.\, \sin q = h \,.\, \mathrm{Cot}\, p$, (XVI) zusammen statt finden:

So sind beyde Gangesebnen eine und dieselbe und folglich auch beyde Gänge einer und derselbe.

XXII. Haben zwo Gangesebnen gleich große Neigungen und sind beyde zugleich entweder recht oder widersinnig fallend:

So liegen sie in einer Ebne, wofern

$$\sin q = \frac{h \,.\, \mathrm{Cot}\, p}{b}$$

Haben sie aber einerley Streichen: So liegen sie in einer Ebne, woferne beyde zugleich recht- oder widersinnig fallen, und

$$\mathrm{Cot}\, p = \frac{b \,.\, \sin q}{h}$$

ist.

Beyde Formeln erhält man aus (XVI), wo p und q zur Gangesebne DC gehören.

XXIII. So viel ist zwar in dieser Untersuchung geometrisch gewiß; Aber es fragt sich demohnerachtet noch: ob auch beyde Gänge ein Gang? zumal da ein Gang mehr als das blos geometrische einer Ebne ist.

Die Sache erhält schon einen großen Grad der Wahrscheinlichkeit, wenn an beyden Stellen einerley Gangarten brechen; Noch größer wird diese Wahrscheinlichkeit, wenn weder im Hangenden noch Liegenden des Ganges ein anderer Gang zu überfahren ist, der ihm fast gleichlaufend streichet.

Da aber ein Gang sowohl Veränderungen seiner Lage, als auch seines physischen, unterworfen:

So kann man unter den in XXI und XXII angezeigten Umständen selten mit Gewißheit, nur ziemlich zuverläßig, sagen, daß beyde Gänge einer und derselbe sind.

Daher werden bey Streitigkeiten über eines Ganges Eigenthum andere Entscheidungsmittel, erfodert.

Von diesen sehe man Herrn von Oppel §. 876; Lobethans Einleitung zum Bergwerksrechte §. 89; Baussens Einleitung zu den in Deutschland üblichen Bergrechten ꝛc. Cap. X, §. 44; Schönbergs ausführliche Berginformation, Seite 48 u. f.

§. 209.
Anmerkung.

Die Vorschriften in XVI und XXI, giebt auch der Herr v. Oppel §. 875, 877, aber ohne Beweis. Herr Hofr. Kästner hat über das bisherige (208) ausführlichere Untersuchungen angestellt, und sie in der 28. Anmerkung seiner Markscheidekunst mitgetheilt, von den ich das meiste im vorigen §. beygebracht habe.

Hier will ich noch anmerken, daß für Q tiefer als A, des Puncts F erste Lage auf der Seite von AB ist, nach der die Ebne CD steigt, aber in seiner zweyten Lage dahin zu liegt, wohin CD fällt.

XVII.
Vierung.

§. 210.
Erklärung.

Man denke sich zwo Ebnen, davon die eine mit des Ganges hangenden Saalbande, (160) die andere aber mit seinem liegenden eine parallele Lage hat, und jene $3\frac{1}{2}$ Lachter vom hangenden und diese so viel vom liegenden Saalbande entfernet ist.

So nennt man den Raum, den beyde Ebnen und die Saalbänder begränzen, dieses Ganges Vierung; die Ebnen selbst aber, mögen die Vierungsebnen heissen.

§. 211.
Erklärung.

Die Vierungsgerechtigkeit eines älter belehnten

lehnten Ganges auf einen jünger belehnten besteht darinne, daß alle Puncte des leztern Ganges die nicht über $3\frac{1}{2}$ Lachter von dem ihm am nächsten liegenden Saalbande des erstern entfernt sind, diesem älter belehnten zugehören.

§. 212.

Anmerkung.

Bey Treibung der Stöllen kommen einige Fälle vor, in denen auf das Recht des Alters nicht gesehen wird, dennoch aber einem Gange die Vierungsgerechtigkeit zukommt.

Hiervon sehe man Herrn von Oppel a. O. §. 917. Schönbergs Berginform. S. 197 ꝛc. und überhaupt von der Vierungsgerechtigkeit das. S. 2, 3, 30, 31, 32, 33; u. a.

§. 213.

Zusatz.

Einen Punct in den Vierungsebnen zu finden, muß man von seinem hangenden Saalbande (160) in die Gegend des Hangenden und von dessen liegenden Saalbande in die Gegend des Liegenden eine gerade Linie ziehen, die auf ihrem Saalbande senkrecht aufsteht und $3\frac{1}{2}$ Lachter lang ist (210 und Geom. 46. S. 5. Z. Erl.).

§. 214.

Zusatz.

Eine solche Linie steht auf des Gangesebne senkrecht, und macht mit einer söhligen einen Winkel der dieses Ganges Neigung Ergänzung zu 90° ist.

Denn

Denn (LV Fig.) BA sey die Linie seines Fallens und DB eine solche wie 213 erfodert; so steht DB auf AB senkrecht, und schneidet verlängert, in C, die durch A gehende söhlige Ebne; Man ziehe CA; so ist BAC des Ganges und DCA der DC Neigung; aber Δ ABC ist bey B rechtwinklicht: Folglich BCA = 90° — BAC.

§. 215.
Zusatz.

Wenn ein jünger belehnter Gang einen älter belehnten schneidet; so treffen nicht alle Linien die auf einem Saalbande des leztern Ganges senkrecht stehen das diesem am nächsten liegende Saalband des jüngern Ganges in $3\frac{1}{2}$ Lachter.

Aber alle Puncte einer Vierungsebne von dem ihm am nächsten liegenden Saalbande des ältern Ganges, haben genannte Entfernung; daher auch die Puncte ihres Durchschnitts mit dem Saalbande (160) des jüngern Ganges.

§. 216.
Erklärung.

Diesen Durchschnitt wollen wir mit dem Herrn Bergmeister Scheidhauer die **Vierungslinie** nennen, dergleichen sowohl in der Gegend des Hangenden als Liegenden des ältern Ganges statt findet.

§. 217.
Zusatz.

Ihre Puncte sind also alle von dem ihr am nächsten liegenden Saalbande des ältern Ganges genau

nau

nau $3\frac{1}{2}$ Lachter entfernt, und auf des jüngern Ganges Saalbande befindlich.

§. 218.
Zusatz.

Ihre Lage ist einerley mit der Lage der Kreuzlinie beyder Gänge: denn beyde sind vermöge §. 210 und G. 2. Erkl. Zusatzes einander parallel.

§. 219.
Aufgabe.

Die Entfernung d der Vierungslinie von der Kreuzlinie zu finden.

Auflösung.

I. Die Ebne FEB (LVI,) stelle das eine Saalband des ältern Ganges vor, dessen Neigung $= \Phi$ und Streichen $= \gamma$ bekannt, die Ebne FBD hingegen des genanntem Saalbande am nächsten liegende des jüngern Ganges, dessen Fallen $= \Phi'$ und Streichen $= \gamma'$ gegeben;

Ueberdieß sey FB beyder Durchschnitt oder Kreuzlinie, ACG die durch einen Punct B in FB gehende söhlige Ebne, und DH die Vierunglinie.

II. Man ziehe DE auf FEB, aber DB und EB auf FB senkrecht:

So ist DB das gesuchte d und DE $= 3\frac{1}{2}$ Lachter $= 3,5$ Lachter (I, 217).

III. Nun hat man zween Fälle zu unterscheiden:

1) **Wenn beyde Gänge einerley Streichen haben.**

IV.

IV. Da liegt FB in der durch B gehenden söhligen Ebne ACG (179), und

$$\left.\begin{aligned} EBC &= \varphi \\ DBA &= \varphi' \end{aligned}\right\} (155)$$

V. Nun ist in dem bey E rechtwinklichten Dreyecke DEB

$$\sin DBE : 1 = DE : DB$$

oder

$$\sin DBE : 1 = 3,5 \text{ Kr.} : d$$

Also

$$d = \frac{3,5 \text{ Kr.}}{\sin DBE}$$

Aber

$$ABD + DBE + EBC = 2\,R$$

oder

$$\varphi' + DBE + \varphi = 2\,R$$

Also

$$\begin{aligned} DBE &= 2\,R - \varphi' - \varphi \\ &= 2\,R - (\varphi' + \varphi). \end{aligned}$$

VI. Folglich

$$d = \frac{3,5 \text{ Kr.}}{\sin(\varphi + \varphi')}$$

2) Wenn beyde Gänge verschieden Streichen haben.

VII. Da ist ebenfalls

$$\sin DBE : 1 = DE : DB;$$
$$= 3,5 \text{ Kr.} : d$$

Hin-

Hingegen der Winkel DBE ist der, den beyde Gangesebnen mit einander machen, und nach §. 185. gefunden werden muß.

VIII. Es bedeute daher hier gleichfalls

a der nach §. 103. aus γ und γ' (I) gefundene Winkel;

n' aber der Winkel, den die Kreuzlinie BF mit dem Durchschnitte des jüngern Gangesebne mit der söhligen ACG, und

n, der, den BF mit dem Durchschnitte des ältern Gangesebne ACG, macht:

So hat man nach angef. 185. §,

$$\sin DBE = \frac{\sin \Phi \sin a}{\sin n'}$$

$$= \frac{\sin \Phi' \sin a}{\sin n}$$

IX. Also

$$d = \left.\begin{array}{l} \dfrac{3,5\ \text{Ltr.}}{\dfrac{\sin \Phi \sin a}{\sin n'}} \\ = \dfrac{3,5\ \text{Ltr.}}{\dfrac{\sin \Phi' \sin a}{\sin n}} \end{array}\right\} \text{(VII)}$$

Folglich

$$d = \frac{3,5\ \text{Ltr.} \times \sin n'}{\sin \Phi \sin a}$$

=

$$= \frac{3,5\ \text{Kr.} \times \sin n}{\sin \Phi' \sin a}.$$

§. 220.

Zusatz.

Es sey im Falle 2) des vorigen §. BH eine auf des jüngern Gange gezogene söhlige Linie:

So ist der ihr Streichen $= \gamma'$ (219, I) und schneidet die Vierungslinie DH unter einen Winkel DHB $= n'$ (219, VIII, und 218).

Wäre die söhlige Linie Bh auf des ältern Ganges gezogen, so würde sie die Vierungslinie hE unter einen Winkel $= n$ geschnitten haben.

Aber

$$BH = \frac{DB}{\sin DHB}$$

$$= \frac{d}{\sin n'}$$

$$= \frac{3,5\ \text{Kr.}}{\sin \Phi \sin a}$$

und eben so

$$Bh = \frac{3,5\ \text{Kr.}}{\sin \Phi' \sin a}$$

§. 221.

Aufgabe.

Durch H (Fig. LVII) einen Punct in der

Vierungslinie, DH gehe eine söhlige Ebne OQH;

M sey ein anderer Punct dessen seigere Teufe MN = p in Beziehung auf OQH, also, wie viel M höher oder tiefer liegt als H, bekannt:

Man sucht HM.

Auflösung.

Der Winkel DHQ ist der Vierungslinie DH Neigung, welche = α′ seyn mag; diese aber ist einerley mit der Kreuzlinie BF ihrer (218). Man kann also α′ nach §. 178. berechnen.

Nun ist in dem bey N rechtwinklichten Dreyecke

$$\sin \alpha' : 1 = NM : HM$$

Folglich

$$HM = \frac{NM}{\sin \alpha'}$$

$$= \frac{P}{\sin \alpha'}$$

§. 222.

Aufgabe.

Auf einer söhligen Ebne, ACE, (Fig. LVIII) die Vierungslinie DH, also eine Linie D′h′, zu verzeichnen, auf der alle Puncte des jüngern Ganges FBD, fallen, die von des ältern seinen MBP, $3\frac{1}{2}$ Lachter entfernet sind.

Auflö-

Auflösung.

1) Für den Fall, wenn beyde Gänge verschiedenes Streichen haben.

I. Die söhlige Ebne schneide die Vierungslinie DH in D, die Kreuzlinie BF in B und des jüngern Gang in BD:

II. So ist BD eine söhlige Linie die des jüngern Ganges Streichen hat, und die Entfernung des Puncts B der Kreuzlinie und Puncts D der Vierungslinie; beyde Puncte aber liegen in der gegebenen söhligen Ebne.

III. Die Größe von BD findet sich nach §. 220

$$= \frac{3{,}5 \text{ Lr.}}{\sin \varphi \sin a}$$

IV. Man stelle sich durch BF, DH seigere Ebnen vor; so sind diese gleichlaufend, und schneiden die söhlige Ebne ACE in den parallelen Linien fb, hD'; jene liegt in der Sohle der Kreuzlinie FB, diese in der der Vierungslinie HD, daß also in hD' alle Puncte des jüngern Ganges fallen, die von des ältern Gange $3\frac{1}{2}$ Lachter entfernet sind.

V. Aus diesen Betrachtungen nun ergiebt sich folgende Regel:

Auf einer söhligen Ebne nehme man einen Punct B an, der einen der Kreuzlinie vorbildet;

Ziehe durch diesen eine söhlige Linie, in dem Streichen des jüngern Ganges;

Nehme auf ihr von B weg, eine Länge = $\frac{3,5 \text{ Lr.}}{\sin \Phi \cdot \sin a}$ entweder dahin zu, wohin der Gang fällt, oder wohin er aufsteigt, nachdem nämlich die Vierungslinie in der Gegend des Hangenden oder Liegenden des ältern Ganges verzeichnet werden soll;

So bestimmt sich ein Punct D, der in der Vierungslinie DH liegt;

Zieht man nun durch diesen eine söhlige Linie hD′:

So hat man das Verlangte.

2) Für den Fall, wenn beyde Gänge einerley Streichen haben.

VI. Da liegt die Kreuzlinie BF in der söhligen Ebne ACE (Fig. LX).

VII. Man denke sich durch die Vierungslinie DH eine seigere Ebne DhD′, welche die söhlige in D′h schneiden wird.

VIII. Dieser Durchschnitt ist mit FB parallel und die zu verzeichnende Linie.

IX. Man ziehe BD′ auf hD′ senkrecht:

So ist der BD Streichen, von den der Kreuzlinie um 6 Stunden unterschieden, also bekannt (178); und

$$DBD' = \Phi';$$

Ferner

Ferner sey DB auf HD senkrecht, also = d.

X. Nun ist in dem bey D′ rechtwinklichten Dreyecke D′DB

$$1 : \mathrm{Col}\, DBD' = DB : D'B$$

oder

$$1 : \mathrm{Col}\, \Phi' = d : D'B$$

$$= \frac{3,5\ \text{Kr.}}{\sin(\Phi' + \Phi)} : D'B \quad (219, \text{VI})$$

XI. Folglich

$$D'B = \frac{3,5\ \text{Kr.} \times \mathrm{Col}\, \Phi'}{\sin(\Phi' + \Phi)}$$

XII. Wenn man also auf einer söhligen Ebne ACE einen Punct B annimmt;

Durch solchen eine Linie zieht, die ein Streichen hat, das von dem der Kreuzlinie, um 6 Stunden verschieden;

$$\text{Darauf von B eine Länge} = \frac{3,5\ \text{Kr.} \times \mathrm{Col}\, \Phi'}{\sin(\Phi' + \Phi)}$$

nimmt, und zwar nach der Gegend, nach welcher des ältern Gang, entweder fällt oder aufsteigt, nachdem nämlich die Vierungslinie im Hangenden oder Liegenden des ältern Ganges angegeben werden soll:

So bestimmt sich dadurch auf ACE ein Punct D′, durch welchen eine Linie hD in dem Streichen der Kreuzlinie gezogen, die verlangte, giebt.

§. 223.

Anmerkung.

Das meiste, was in diesem Abschnitte von der Vierung gesagt worden, findet sich auch nebst einigen andern hieher gehörigen Aufgaben, (die sich aber leicht aus dem bisherigen herleiten lassen) in dem §. 127, angeführten Manuscripte des Herrn Bergmeister Scheidhauers, aber ohne Beweis. Ich habe die Sache auseinander zu setzen gesucht, zumal da man, so viel ich weiß, noch in keinem Markscheidebuche, diese Art die Vierung zu bestimmen, antrift, und sie weit besser als das gewöhnliche Verfahren ist.

§. 224.

Anmerkung.

Was in diesem Anhange von der Markscheidekunst ist beygebracht worden, ist beynahe alles was in diesem Geschäfte vorkommen kann.

Wegen des Uebrigen, was noch hätte beygebracht werden sollen, wird man sich leicht aus des Herrn von Oppels Markscheidekunst Raths erholen; alles aber ohne Schwierigkeit nach der hier beygebrachten Art behandeln können, wenn man das bisherige wohl verstanden hat.

Und so hoffe ich die Anwendung der Geometrie und beyder Trigonometrien auf die Markscheidekunst zur Gnüge gezeigt zu haben.

Anfängern, den diese Kunst interessiret, werden hieraus sehen, daß man zu einer gründlichen Erlernung

lernung derselben Arithmetik, Geometrie, ebne und sphärische Trigonometrie gehörig wissen muß, ja auch in der Analysis nicht unbekannt seyn darf, weil man mittelst dieser unter andern die Folge der Fehler in den Messungen schätzen lernt.

Dies konnte ich aber hier nicht mit abhandeln, weil ich nur Anwendung der Geometrie und beyder Trigonometrien auf die Markscheidekunst aufstellen wollte, und auch genannte Lehren nur voraussetzen durfte. Allein in einer systematischen Anleitung zur Markscheidekunst, muß allerdings (wie in der zur Feldmeßkunß) die Theorie der Fehler abgehandelt werden; welches aber in unsern bisherbekannten Markscheidersystemen noch nicht geschehen ist. Indessen kann sich ein Markscheider deshalb in den in der 3. Anmerkung und der Erläuterung des 36. Satzes der Geometrie angeführten Büchern Rath erholen. Man muß aber (wie gedacht) dazu mehr, als etwas Rechenkunst und gemeine Geometrie verstehen; wiewohl man bey manchen Markscheider eben nicht mehr suchen darf.

Druckfehler

so in Herrn Hofrath Kästners Trigonometrie gefunden worden.

Seite 373, Z. 15, l. Durchmesser statt Halbmesser.
— — 17, l. AH st. AQ.
— — 19, l. Af st. af.
— — 25, l. DCE st. DCH.
— 374 — 2 l. ABhF st. ABHF.
— 379 — 6 l. Bogen st. Winkel.
— 385 — lezte l. lCG st. lCA.
— 386 — 5 l. lCG st. lCA
— 401 — 9 l. 9 st. 8.
— 406 — 10 l. $\sin\gamma \operatorname{Cof}\alpha$ — $\operatorname{Cof}\gamma \sin\alpha$ statt $\sin\gamma \operatorname{Cof}\alpha$ — $\operatorname{Cof}\gamma \sin\gamma$
— 407 — 16 l. $+ \mu^2\sigma^2$ st. $+ m^2\sigma^2$
— 408 — 1 l. seines Sinus Quadrats st. seines Quadrats.
— 409 — 9 l. $\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4}$ — $\frac{1}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ statt $\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{4}$ $\frac{1}{2}$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
— 411 — 16 l. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ — $\frac{1}{2}$ st. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ + $\frac{1}{2}$
— 17 l. sin 15° st. sin 75°
— 415 — 8 l. $\sqrt{(\frac{1}{2}.(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}))}$ statt $\sqrt{(\frac{1}{2}.(1 - \frac{\sqrt{}}{2}))}$

Seite

Seite 415 Zeile 9 l. $\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ statt $\sqrt{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}$

— 416 — 21 l. nach 2 st. nach 3

— 419 — 7 l. . (b + c — a) st. . (b + c + a)

— 8 l. 1 — Cos A $=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

statt 1 — Cos a $=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

— 427 — 10 l. log 4 st. log u

— 443 — 10 l. AbP st. ADP

— 11 l. aBP st. adP

— 446 — 16 l. PBD st. BPD

— 448 — 20 l. Cos BPA . t BP st. BPA . tBP

— 24 l. B st. A

— 449 — 11 l. 20. S. 1. Z. st. 20. S. Z.

— 24 l. (8; 7;) st. (8; 9;)

— lezte l. + DM^2 st. + NM

— 452 — 15 l. $\frac{\sin \text{tab } \frac{1}{2} B^2}{r^2}$ st. $\frac{\sin \text{tab } \frac{1}{2} B^2}{r^2}$

— 456 — 3 l. sDPA st. sDBA.

Folgende sind noch in der Arithmetik und Geometrie gefunden worden.

S. 60 Z. 11 l. (63) st. (93)
S. 73 Z. 14 nach c setze man d
S. 143 Z. 7 l. q st. s
S. 154 Z. 10 l. (25) st. (26)
S. 193 Z. 4 l. $\frac{2}{3}$ st. $\frac{1}{2}$
S. 197 Z. 21 l. IH st. Im

Seite 210 Z. 3. l. 2. CAB st. 2. EAB
S. 211 Z. 6 l. NLQ st. N Q
l. GIF st. G F
Z. 10 l. (17. S. 4. Z.) st. (17. S. 5. Z.)
Z. 13 l. oder ein Theil st. oder einen Theil
Z. 26 nach GKD setze man Fig. 76
S. 213 Z. 10 l. $\frac{1}{360}$ st. $\frac{1}{306}$
S. 222 Z. 23 l. 22 st. 21
S. 229 Z. 19 l. durch st. auch
S. 234 Z. 14. l. 90° + 90 . 0, 42 . r statt 90°
+ 90°, 51 . r
Z. 15 l. 37, 8 . r st. 36, 9 . r
Z. 17 l. 1, 8 st. 0, 9
S. 235 Z. 6 l. 0, 0125725 st. 0, 0125716
S. 226 Z. 14 l. c8 st. d7
Z. 15 l. c8 st. d7
S 254 Z. 13 l. seine st. seiner
S. 266 Z. 2 v. u. l. Sechsecks st. Dreyecks
S. 270 Z. 3 v. o. l. R — $\frac{1}{2}$ ABI st. R — $\frac{2}{3}$ ABI
S. 277 Z 18 l. 7. Z. st. 1. Z.
S. 286 Z. 24 l. $\frac{1}{2}$ f st. $\frac{3}{2}$ f
S. 317 Z. 4 l. (3. Z.) st. (2. Z.)
S. 316 Z. 26 l. (4. Z.) st. (3. Z.)
S. 317 Z. 15 l. PEq — PHq st. PEq — HEq
S. 325 Z. 25 l. 112. Fig. st. 129. Fig.
S. 332 Z. 16 l. BASN st. PQVO
S. 363 Z. 29 l. 4 r^3 oder $\frac{1}{2}$ d^3 st. r^3 oder $\frac{1}{8}$ d^3.

Verbes-

Verbesserungen

zu den Erläuterungen.

Erster Theil.

Seite 4 Z. 3" setze man nach dem Worte: dem-
selben; noch folgendes: ein- oder
etlichemal genau
Z. lezte Nach dem Worte: aliquanter,
setze man: So ist viere ein ali-
quoter Theil, fünfe aber ein ali-
quanter Theil von sechszehn
S. 5 Z. 19 l. Grundsatz statt Gtundsatz
Z. 23 l. einerley st. ein einerley
S. 6 Z. 17 l. Buche st. Buch
S. 12 Z. 15 l. Wortstreite st. Wortstreit
Z. 17 l. dem st. den
Z. 22 l. Gelegenheit st. die Gelegenheit
S. 13 Z. 12 l. Worterklärung st. Werkerklärung
S. 14 Z. 5 l. den st. der
S. 18 Z. 15 nach: in, setze man: der
S. 20 Z. 10 v. u. l. Mengen st. Menge.
Z. 8. v. u. l. dafür st. davor
S. 22 Z. 1 v. o. l. bestehend st. besteht
S. 25 Z. 12 l. für einen st. vor ein
S. 24 Z. 2 l. tetradische st. tedradische

Seite 26 Z. 12 v. u. l. Syrakus st. Syrakos
Z. 17 v. o. l. Einer st. Einen
S. 27. Z. 2 v. u. l. in der zweyten st. in zweyten
S. 28 Z. 14 v. o. l. zwoen st. zween
S. 30 Z. 17 l. (3 + 4 + 8) st. (3 + 3 + 8)
S. 31 Z. 2 l. 4 + 2 st. 4 × 2
S. 38 Z. 14 das Wort: sind, streiche man aus
S. 39 Z. 8 nach: man, ist zu setzen: deshalb

S. 50 Z. 17 l. $\frac{3 \cdot 5}{5}$ st. $\frac{3 \cdot 5}{5}$

S. 53 Z. 2 l. $\frac{8 : 4}{12} = \frac{8}{12} : 4$ st. $\frac{8 : 4}{22} = \frac{8}{12} : 4$

Z. 6 l. $\frac{8}{12} : 4$ st. $\frac{8}{12} : 4$

S. 54 Z. 5 nach: $\frac{45}{90}$ setze man: $\frac{45 : 3}{90 : 3} = \frac{15}{30}$

S. 58 Z. 10 l. zwo st. zwey
Z. 21 l. Einern st. Einer
S. 61 Z. 13 l. Products st. Producta

S. 79 Z. 14 l. $\frac{Q}{n} = K$ st. $\frac{Q}{m} = K$

S. 78 Z. 14 l. 5, 7 st. 5 7
S. 80 Z. 3 l. hätten st. hätte
S. 99 Z. letzte l. $13 - 4 < 6 + 7 - 3$ statt
$13 - 4 > 6 + 7 - 3$
$10 : 5 < (8 + 2) : 2$ statt
$10 : 4 > (8 + 2) : 2$
S. 194 Z. 20 l. Tage st. Th.

Seite 112 Z. 16 l. $\frac{37}{80}$ statt $\frac{17}{80}$

S. 153 Z. lezte, nach: Rechenkunst, seze man:
u. a. ähnlichen

S. 157 Z. 21 l. — 3 st. 3
S. 161 Z. 23 l. 1758 st. 1778
S. 163 Z. 6 l. negativer st. negativischer
Z. 14 l. positiv st. vor positiv
S. 166 Z. 22 l. beyn st. beym
S. 173 Z. 5 v. u. l. den st. dem
S. 198 Z. 3 v. u. l. einem st. ein
Z. 2 v. u. l. ebendemselben st. ebendenselben
S. 201 Z. 2 v. o. l. Strecke st. Strecken
S. 215 Z. 16 l. daß fast st. fast
S. 219 Z. 7 l. Bezeichnung st. Berechnung
S. 227 Z. 1 l. 4285 st. 4185
Z. 3 v. u. käme st. könne
S. 232 Z. 10 v. o. l. Reste st. Resie
S. 235 Z. 2 l. den st. der
S. 243 Z. 15 l. 30^{-5} st. 30^{-5}
Z. 16 l. 14^{-1} st. 14^{-1}
Z. 17 l. 14^{-1} st. 14^{-1}
S. 255 Z. 18 l. einen st. einem
S. 256 Z. vorlezte l. 3. Abschn. 12. Capitel statt
12. Capitel
S. 259 Z. 2 l. $(674)^2$ st. $(644)^2$
Z. 8 l. $+ 5^2$ st. $+ 4^2$

Seite

Seite 261 Z. 10 l. eine st. Eine
S. 262 Z. 22 l. eines st. eins
S. 265 Z. 13 l. sind st. seyn
S. 274 Z. 7 l. = b : xb st. = xb
S. 275 Z. 8 l. ist b st. ist a
Z. 16 l. auch st. Und
S. 281 Z. 2 l. waren st. war
Z. 3 l. stehet st. stehen
Z. 16 l. beyde st. beyden
S. 283 Z. lezte l. $\frac{e}{f+g}$. f statt $\frac{f+g}{e}$. f
S. 287 Z. 6 l. Legaten st. Legate
S. 288 Z. 15 l. gekommen seyn st. kommen
S. 291 Z. 5 l. = c : h st. = ch
Z. 15 l. Unter: §. 53, setze man: **Wenn die ..... wie die Ursachen.**
Zwischen der 12. und 13. Zeile setze man: **Also** 7000 . 12 .... **..... zweyten das e findet.**
S. 292 Z. 20 l. e st. c
S. 293 Z. 4 l. C : c st. 6 : C
S. 299 Z. 11 v. u. l. 2 Ggr. st. ggr.
S. 304 Z. 8 v. o. l. sey st. seyn
S. 305 Z. 15 l. erhält st. erhalte
S. 308 Z. 15 l. Kästner st. Käster
Z. 18 l. dem st. den
S. 310 Z. 6 l. Zeilen st. Zeile
Z. 9 l. von st. vom

Seite 312 Z. 8 l. πολλαπασιαθεῖσαι st. πολ-
λαπλασιαθεισαι

S. 313 Z. 4 l. Verhältnisse st. hältnisse
S. 315 Z. vorlezte l. einmal st. viermal
S. 317 Z. 10 l. zu welchen st. zu welcher
Z. 22 l. wichtig st. richtig
S. 324 Z. 13 l. 1 : 2 st. die 1 : 2
S. 326 Z. 3 l. $a^{\frac{m}{m}}$ st. a^{m}_{m}
S. 328 Z. 20 und 26 streiche man (I) aus
S. 343 Z. l. abcā st. aleeā
S. 345 Z. l. 1618 st. 16 8
S. 354 Z. l. ihr st. ihn
S. 368 Z. l. negative Verhältnisse st. Verhältnisse
negativer Größen.
S. 370 Z. 18 l. nascano st. ne nascano
Z. 19 l. affatto st. affato
Z. 22 l. indi st. in di
Z. 25 l. incorrere st. incerrere
S. 371 Z. 1 l. proporzione st. proportione
Z. 5 l. nascano st. nascono
S. 372 Z. 12 l. dieses st. dies

Zweyter Theil.

S. 4 Z. 24 l. σωζόμενα statt ϛωζόμενα
S. 10 Z. 13 l. nen st. ne
S. 14 Z. 24 l. trapezoides st. travezoides
S. 24 Z. 8 l. der st. den
S. 32 Z. 1 und 2 l. Zusatze st. Zusatz
S. 34 Z. 3 v. u. l. Halbirungen st. Halbirung
S. 35 Z. 18 v. o. l. das st. des
Z. 21 l. Eine st. Einer
S. 57 Z. 2 v. u. l. an, st. an
Z. 1 v. u. l. an, st. an
S. 59 Z. 12 v. o. l. nach st. noch
S. 66 Z. 2 l. gleichlaufende st. gleichlautende
S. 81 Z. 4 und 5 v. u. l. Viereck st. Parallelogramm
S. 86 Z. 2 v. o. l. jedem geradlinichten Dreyecke st. jedem Dreyecke
S. 91 Z. 4 v. u. l. 51° st. 57°
Z. 3 v. u. l. 51° st. 57°
S. 94 Z. lezte l. XIX st. IXX
S. 97 Z. 9 und 10 l. Complement st. Compliment
Z. 27 l. Complement st. Compliment
S. 129 Z. 28 l. Dingen st. Dinge
S. 180 Z. 23 l. zwey st. zwo
S. 190 Z. 16 l. 3, 5, ꝛc. st. 3
Z. 17 l. blos durch st. durch
S. 200 Z. 4 l. Achtellachters st. Ach ellachters
S. 203 Z. 7 l. Anfängern st. sie Anfängern

Seite 208 Z. 17 l. 34 st. 22
S. 216 Z. 11 l. ist st. sind
S. 238 Z. 18 l. √ AB . BC st. √ AB : BC
S. 266 Z. 16 l. Schriften st. Schreiben
S. 284 Z. 8 l. ACB st. A B
S. 305 Z. 2 nach: Buchstabe, setze man: in beyden
S. 305 Z. 4 v. u. nach: oder setze man: ein
S. 307 Z. 5 v. u. nach: H, setze man: und für PEq — HEq lese man PEq — PHq
S. 392 Z. 4 l. $\frac{4}{3}\pi r^3$ st. $\frac{3}{4}\pi r^3$
S. 400 Z. 4 l. 3. Zus. st. 3

Folgendes gehört als Erl. zu 42. Satz 2. Zusatz. Anm.

Wenn man zwo Linien hat; so frägt sich wie ist ihr Product beschaffen?

Sieht man diese Linien als Zahlen an; so ist a . b eine Menge Quadrate, die dem Rechtecke unter den Linien a, b zukommen, wie aus dem 3. Zusatze erhellet und im 67. Satze noch mehr auseinandergesetzt ist.

Betrachtet man aber a, b als Linien; so giebt a, b eine Linie.

Denn wenn aus a, b ein Product zu machen vorgegeben wird; so muß dabey entweder eine Linie als Einheit gegeben seyn oder man kann sie nach Gefallen annehmen. Nun ist nach Ar. V. 20

$$1 : a = b : ab$$

Da aber 1, a, b Linien sind; so muß a . b auch eine seyn.

Dieß Product nun in einer Linie darzustellen muß man sich des 30. Satzes bedienen und also nach diesem zu der gegebenen oder angenommenen Einheit und der Linien a, b die vierte geometrische Proportionallinie suchen.

Zum Beyspiel dienen die dortigen drey Linien AB, AC, BD wo AB die gegebene oder angenommene Einheit AC = a, BD = b; so ist die dort gefundene vierte geometrische Proportionallinie CE = a × b.

Nähme man zur Einheit eine größere oder kleinere Linie als AB an; so erhielte man zum Producte eine Linie die zu dieser neuen Einheit eben die Größe hätte als CE gegen AB, aber in Rücksicht der AB größer oder kleiner wäre (nachdem nämlich die neu angenommene Einheit > oder < AB).

Zu den Erläuterungen des 57. S. 10. Zus. gehört folgendes.

Die Erläuterungen am a. O. gelten in so ferne man die gegebenen Linien a, b, c als Zahlen betrachtet.

Sieht man aber a, b, c, als Linien an; so erhält man eine Linie.

Denn

Denn a ⋌ b ist eine, und nach Arithm. V. 20 hat man

1 : a . b = c : a . b . c,

Folglich a, b, c eine Linie.

Diese zu finden muß man nach dem 30. Satze zu 1, a, b die vierte geometrische Proportionallinie = a ⋌ b und dann zu 1, a ⋌ b, und c eine 4te geometrische Proportionallinie suchen, welche = a . b . c seyn wird.

Will man eine Linie = a ⋌ b ⋌ c ⋌ d finden; so darf man nur erstlich a . b . c und dann a . b . c . d suchen.

Auf ähnliche Art verfährt man mit Findung des Products mehrerer Linien.

Dritter Theil.

S. 5 Z. lezte streiche man: kann, aus
S. 23 Z. 2 nach: AD sowohl als CG muß ein Comma folgen
S. 49 Z. 23 l. erstlich st. erste
S. 52 Z. 12 l. AF st. CF
S. 56 Z. 7 und 8 l. Pitiscus st. Piuscus
S. 148 Z. 19 l. Col (α — β) st. Col — β)
S. 169 Z. 6 l. demselben st. derselben
S. 180 Z. 26 l. sin P st. P
S. 185 Z. vorlezte l. (Cosin NM) st. (sin NM)
S. 187 Z. 17 l. Cosin BA st. BA

S. 199 Z. 3 v. u. l. nicht nur st. nicht
S. 205 Z. 5 v. o. l. nach Art st. nach
S. 208 Z. 22 l. $\pm$ BA st. + BA
S. 209 Z. 24 l. BPb st. BPp
S. 211 Z. 6 l. Dreyecks II st. Dreyecks
Z. 10 l. Winkels st. Winkel
PBa st. BPA
Z. 17 l. Pba st. PbD
Z. 19 l. PdB st. PaB
Z. 24 l. PBd st. PBD
Z. letzte l. PBd st. PBD
S. 217 Z. 9 l. Ab st. AB
Z. 16 nach): stumpf setze man: (7)
Z. 18 nach: III. streiche man (7) weg.
S. 218 Z. 18 l. bD st. dD
S. 219 Z. 10 l. Pb st. Pd
Z. 20, 21 l. Dreyecke PAT st. Dreyecke
S. 221 Z. 10 l. von a nach b st. von nach ab
S. 223 Z. 5 l. Pd st. Pet
S. 224 Z. 21 l. als auch st. oder
S. 244 Z. 8 l. des st. das
S. 259 Z. 22 l. Tf. st. Tr.
S. 262 Z. 5 v. u. l. dann st. den.
S. 264 Z. 21 v. o. l. BPD $\rhd$ BPA st. BPD $\lhd$ BPA
S. 264 Z. 22 l. BPD $\lhd$ BPA st. BPD $\rhd$ BPA.

Fig. I. Ebne Trigonometrie

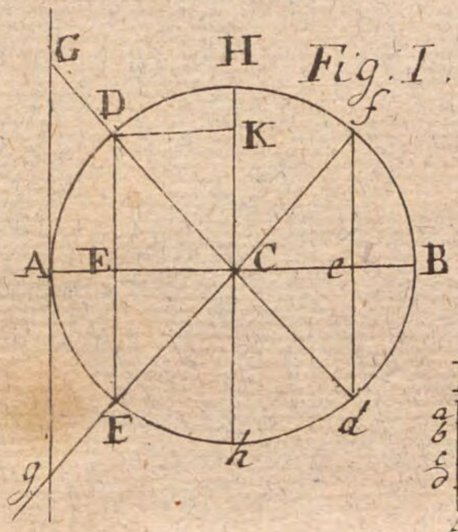


Fig. II.

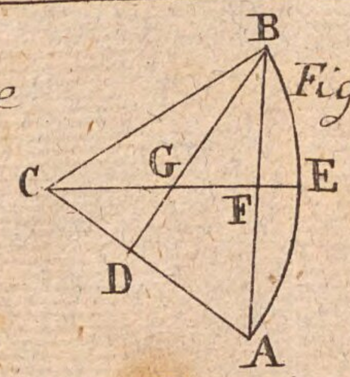


Fig. III.

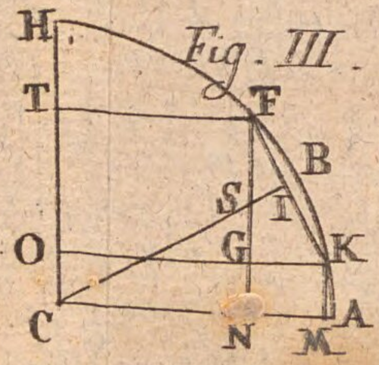
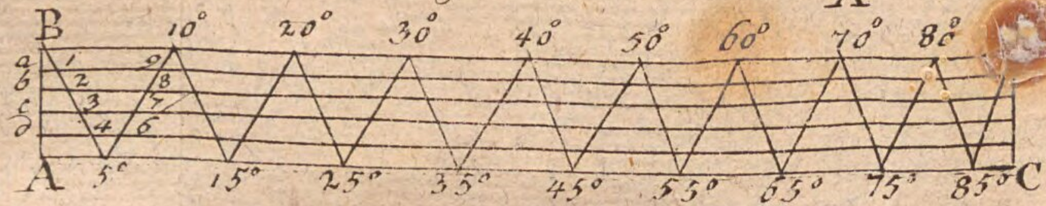


Fig. IV.



Sphaerische Trigonometrie

Fig. I.

Fig. II.

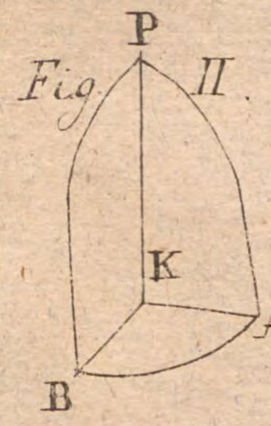


Fig. III.

Fig. IV

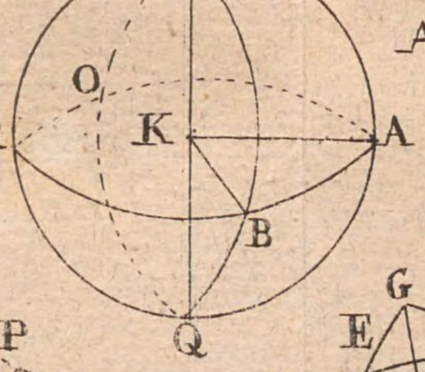


Fig. V.

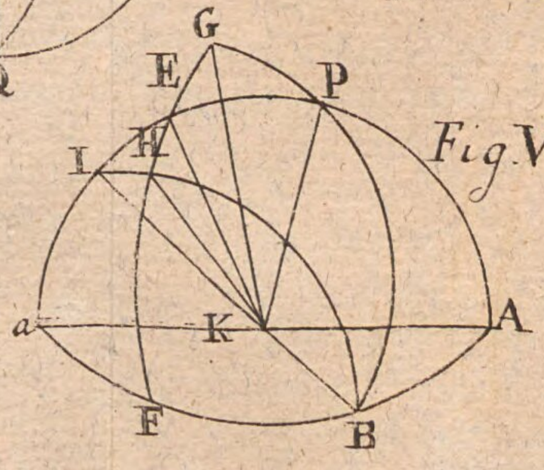


Fig. VI

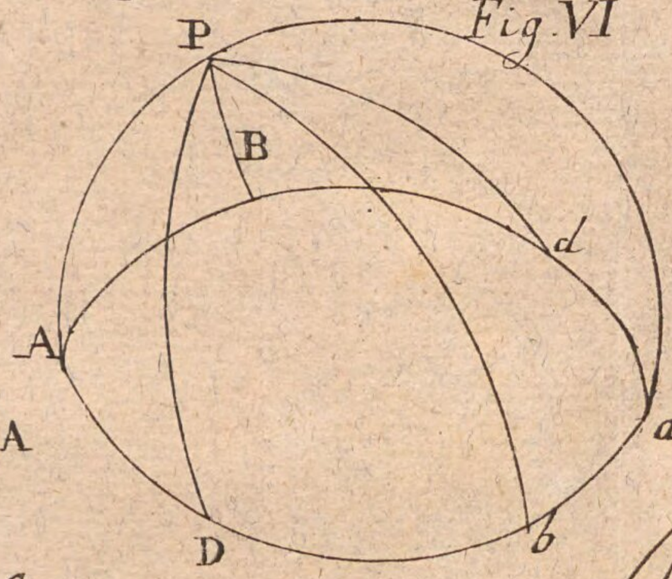


Fig. VIII.

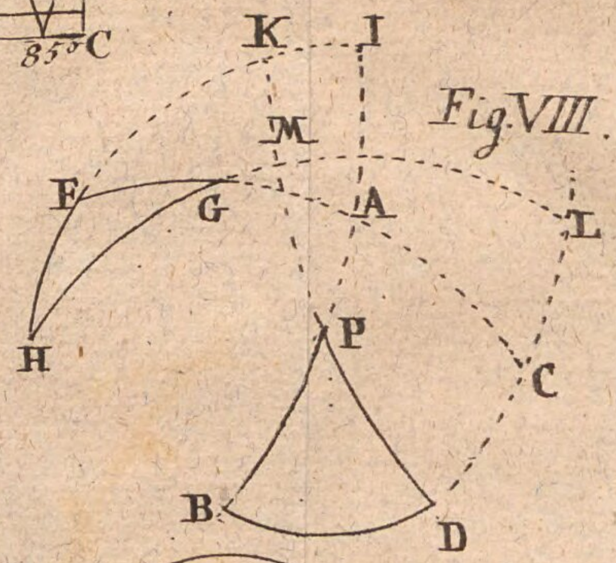
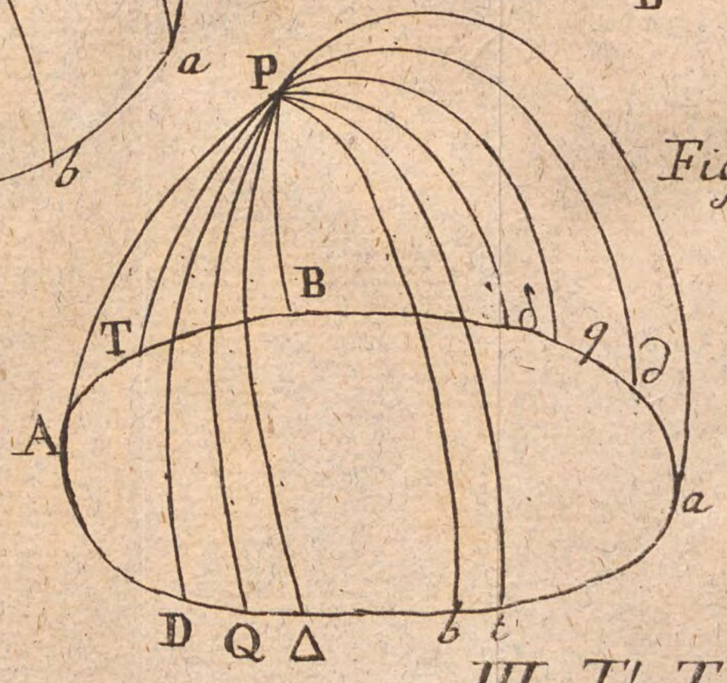


Fig. VII.



III. Th. Tab. I.

Anhang.

Fig. I.

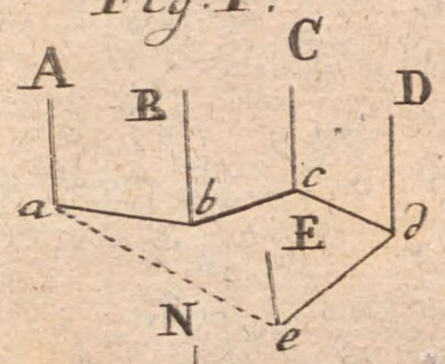


Fig. II

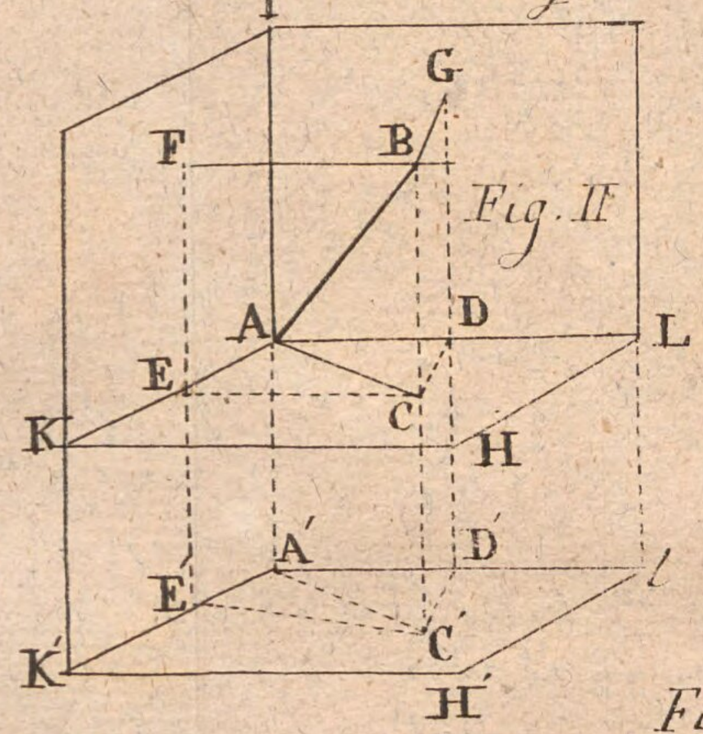


Fig. IV.

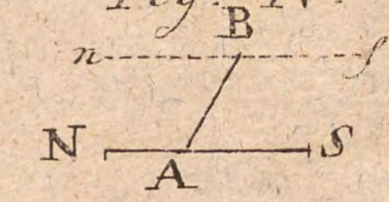


Fig. VI

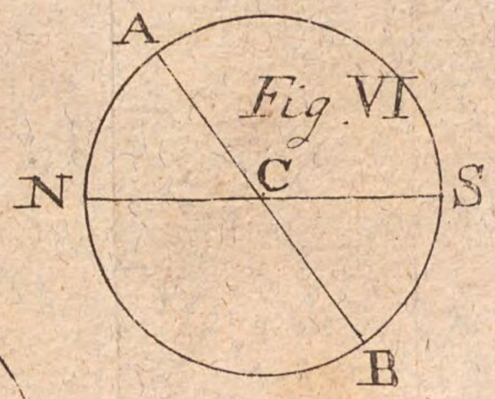


Fig. V.

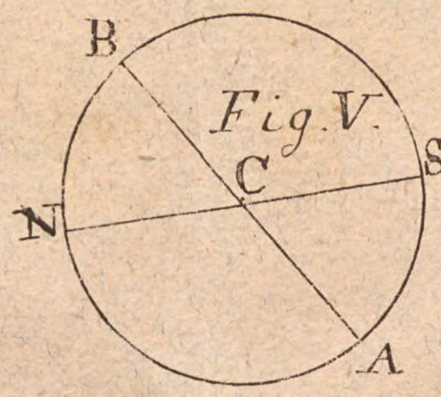


Fig. XIV

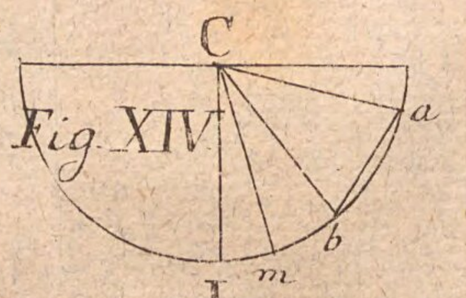


Fig. VII.

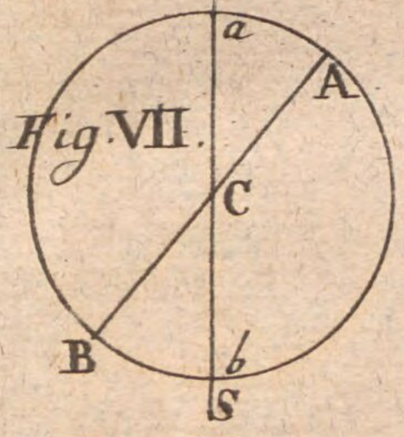


Fig. III.

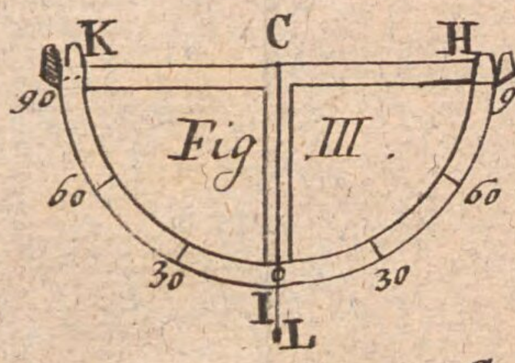


Fig. XII.

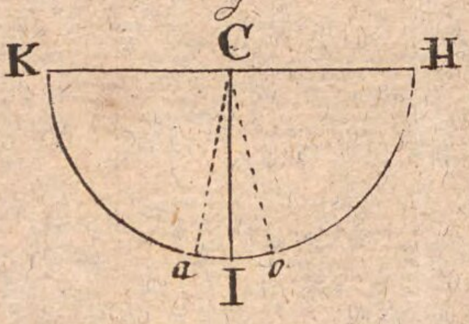


Fig. XIII.

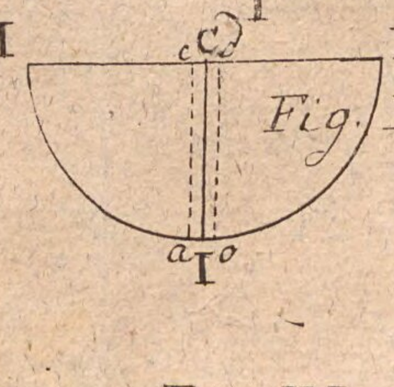


Fig. VIII

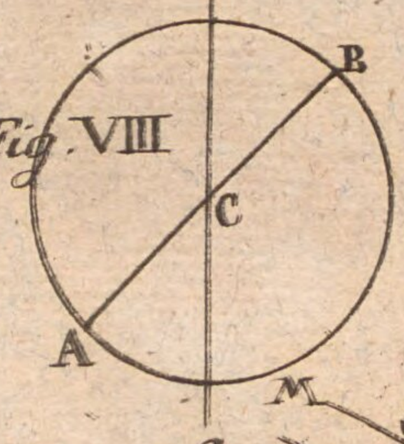


Fig. IX

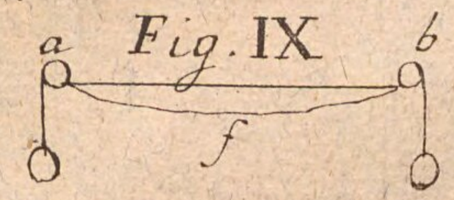


Fig. XI

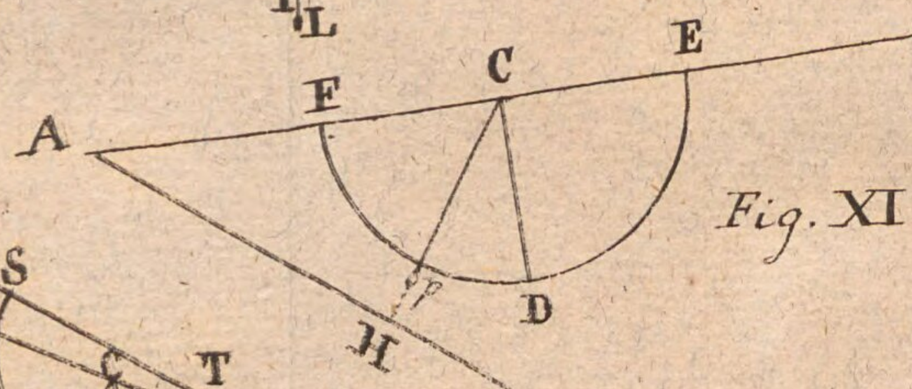


Fig. XV.

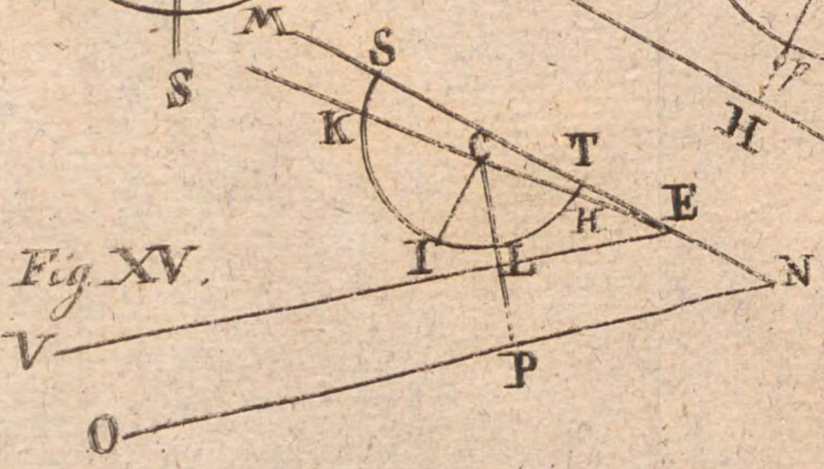
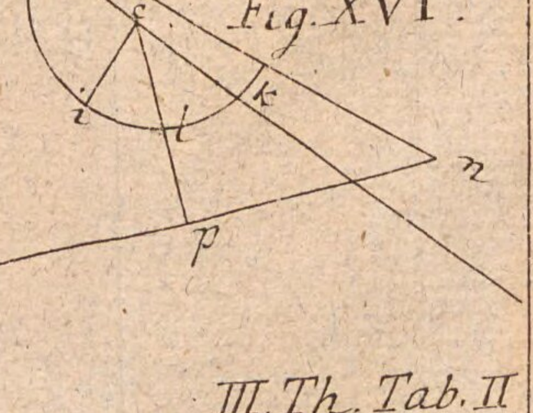


Fig. XVI.



III. Th. Tab. II

Fig. XVII

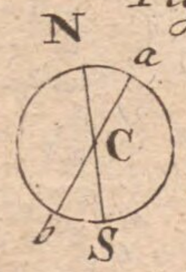


Fig. XVIII.

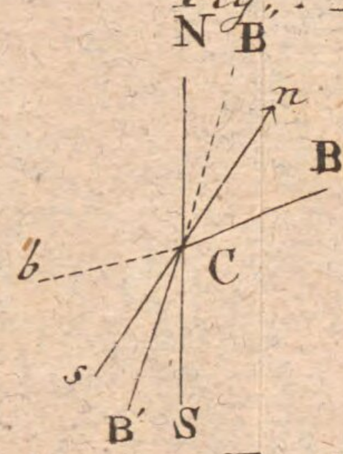


Fig. XIX

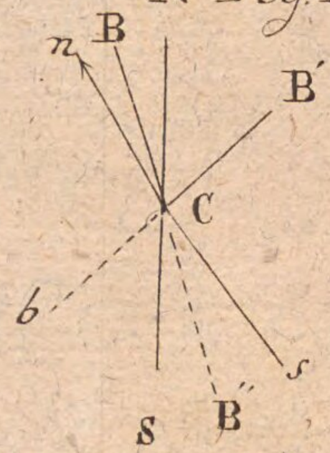


Fig. XX.

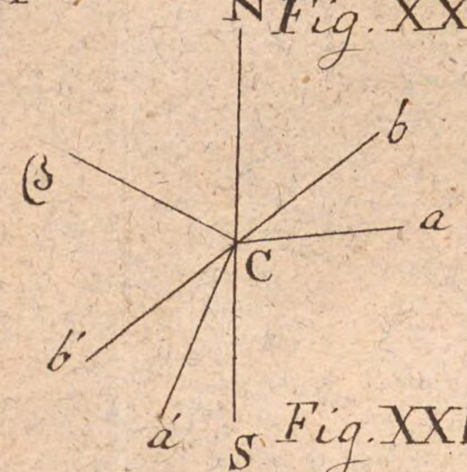


Fig. XXI.

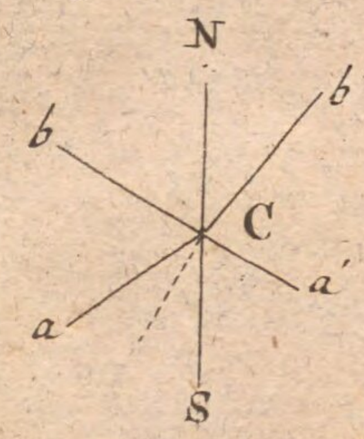


Fig. XXII.

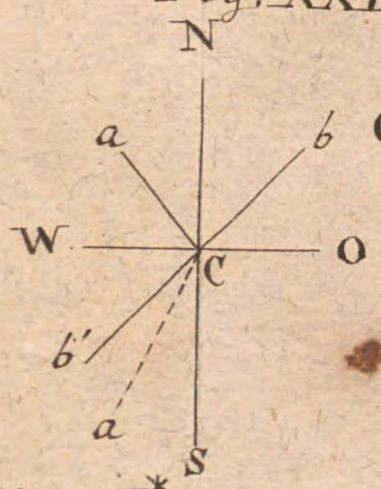


Fig. XXIII.

Fig. XXIV.

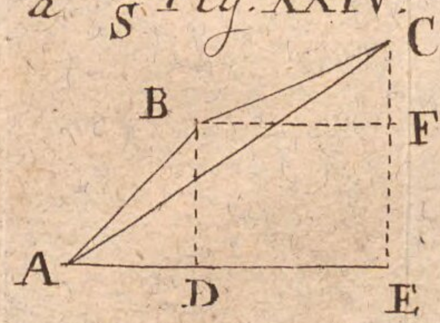


Fig. XXV.

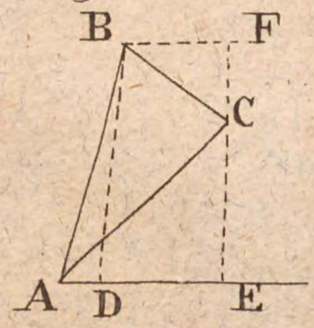


Fig. XXVI.

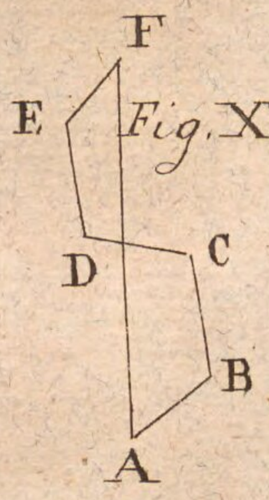


Fig. XXVII*

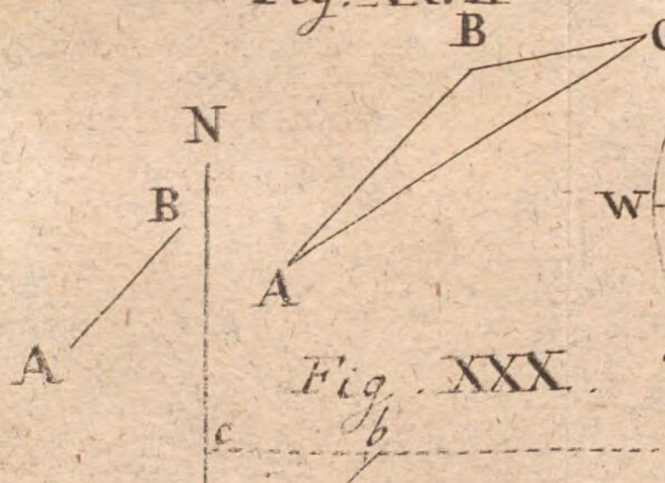


Fig. XXVII

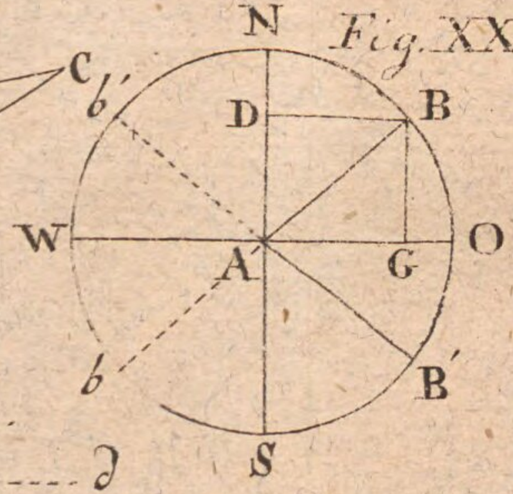


Fig. XXVIII

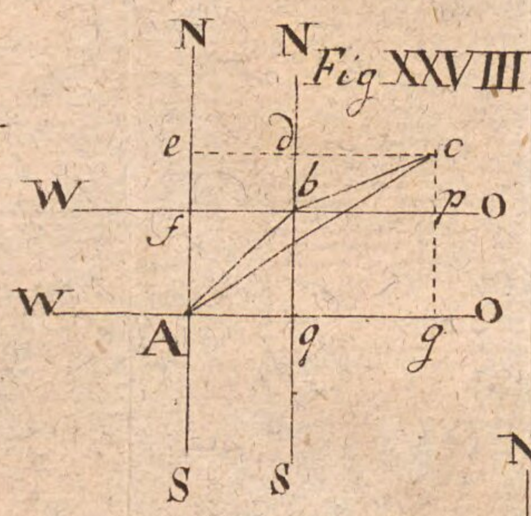


Fig. XXIX.

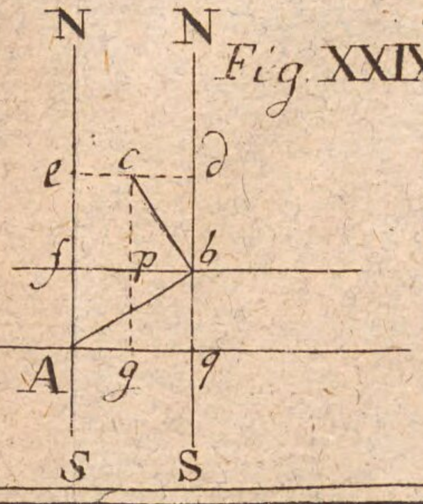


Fig. XXX.

III. Th. Tab. III.

Fig. XXXII

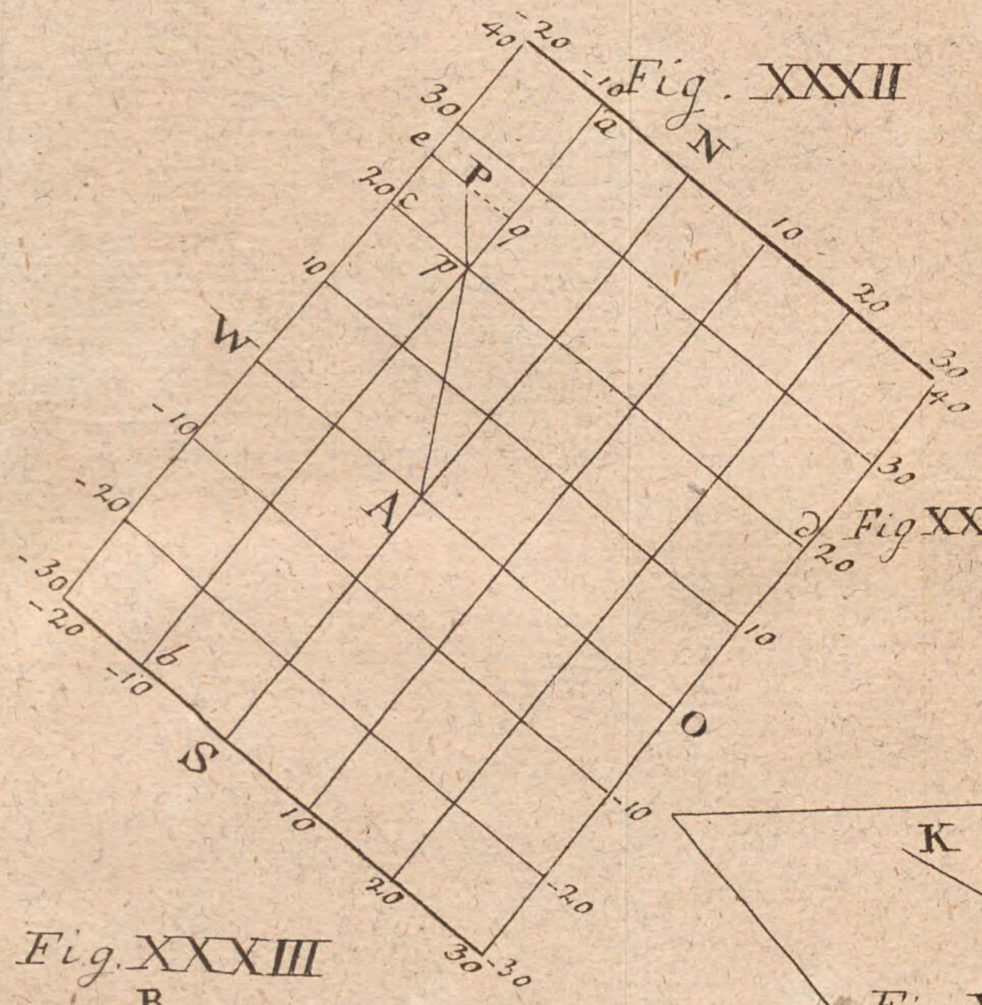
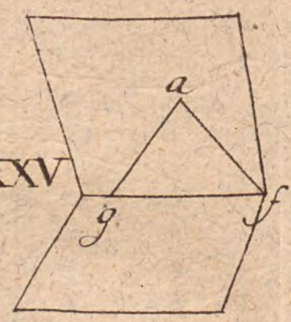


Fig. XXXV



XXXI. Fig.

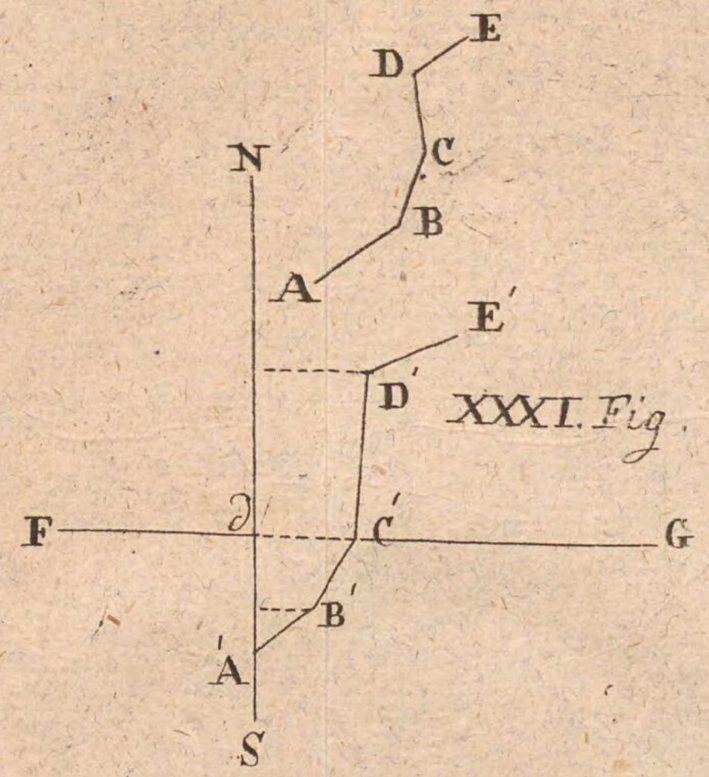


Fig. XXXIII

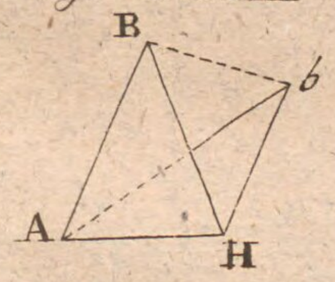


Fig. XXXIV

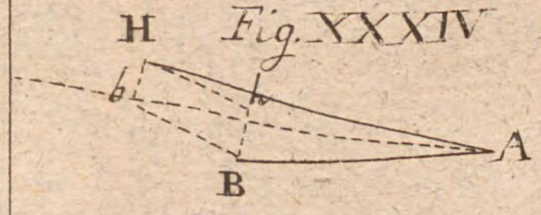


Fig. XXXVI.

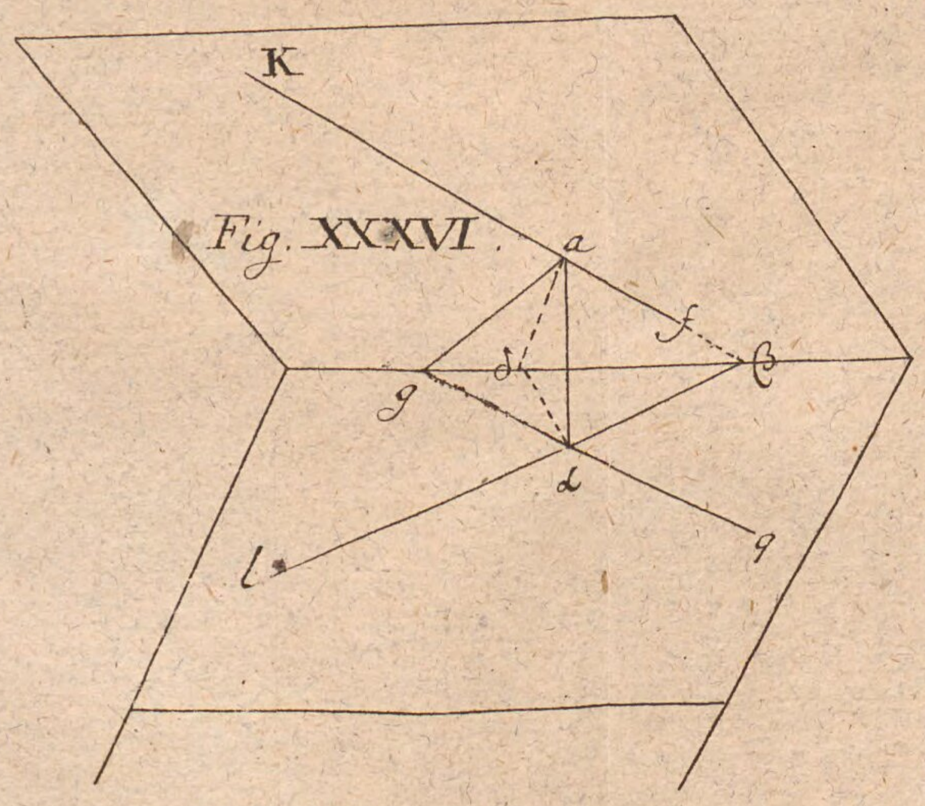
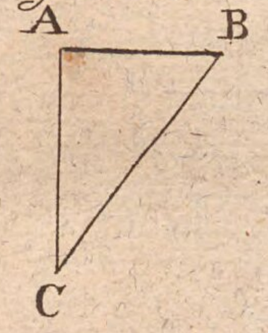


Fig XXXVII



III. Th. Tab. IIII.

Fig. XXXIX.

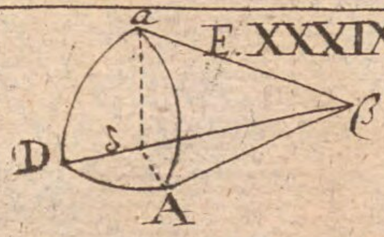


Fig. XL.

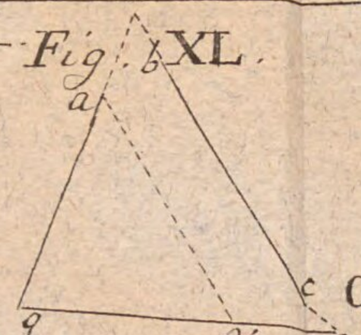


Fig. XLI.

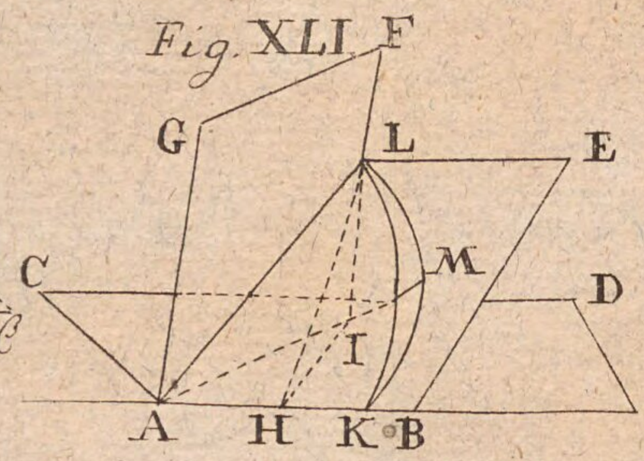


Fig. XLII.

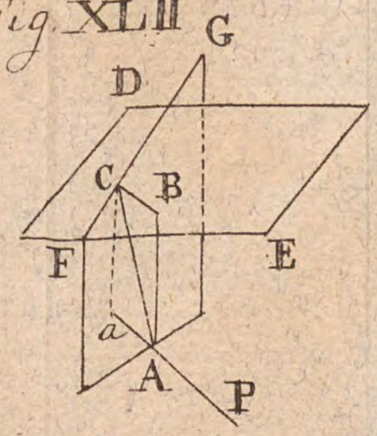


Fig. XLIII.

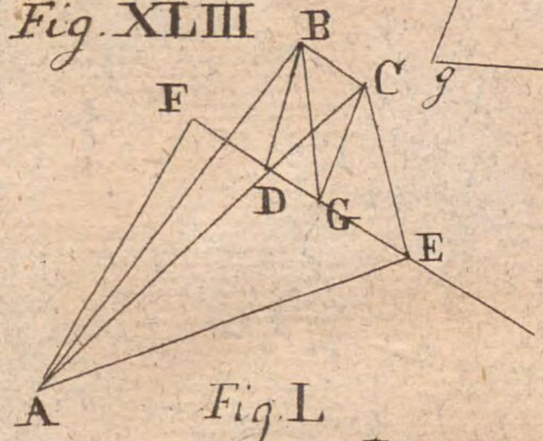


Fig. XLIV.

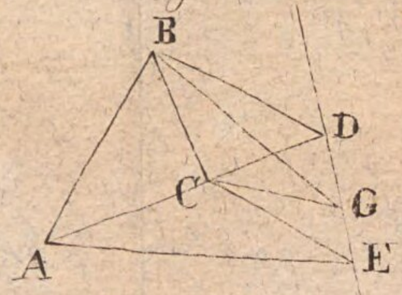


Fig. XLV.

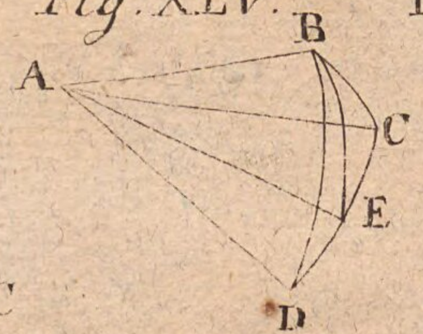


Fig. XLVIII.

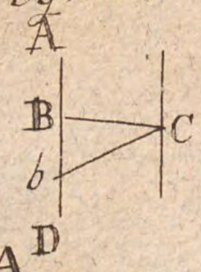


Fig. LI.

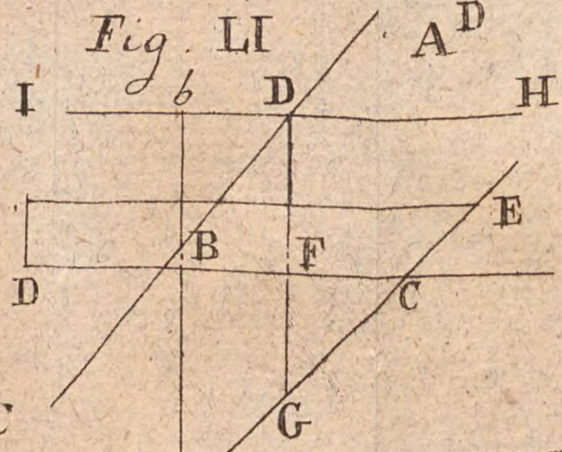


Fig. L.

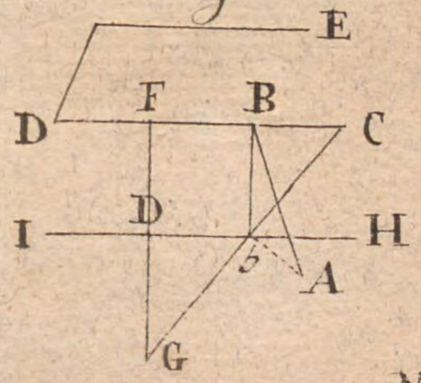


Fig. XLVII.

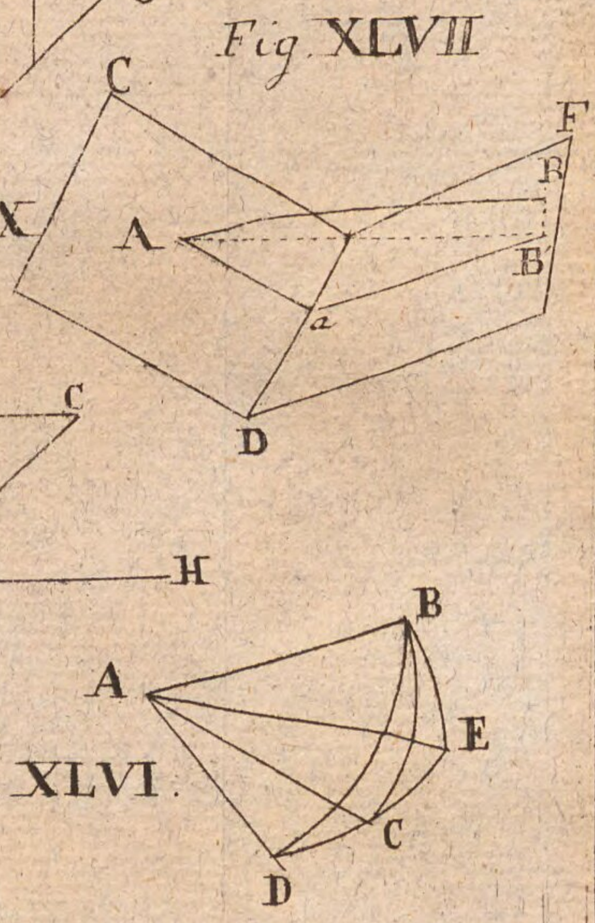


Fig. XLIX.

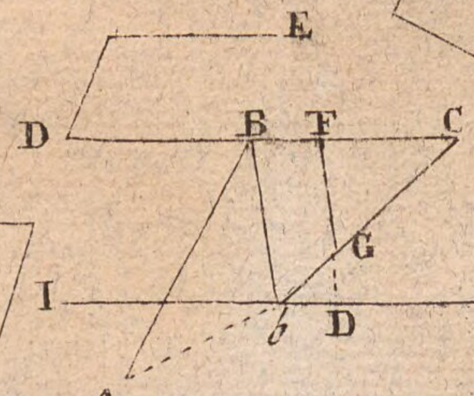


Fig. LII.

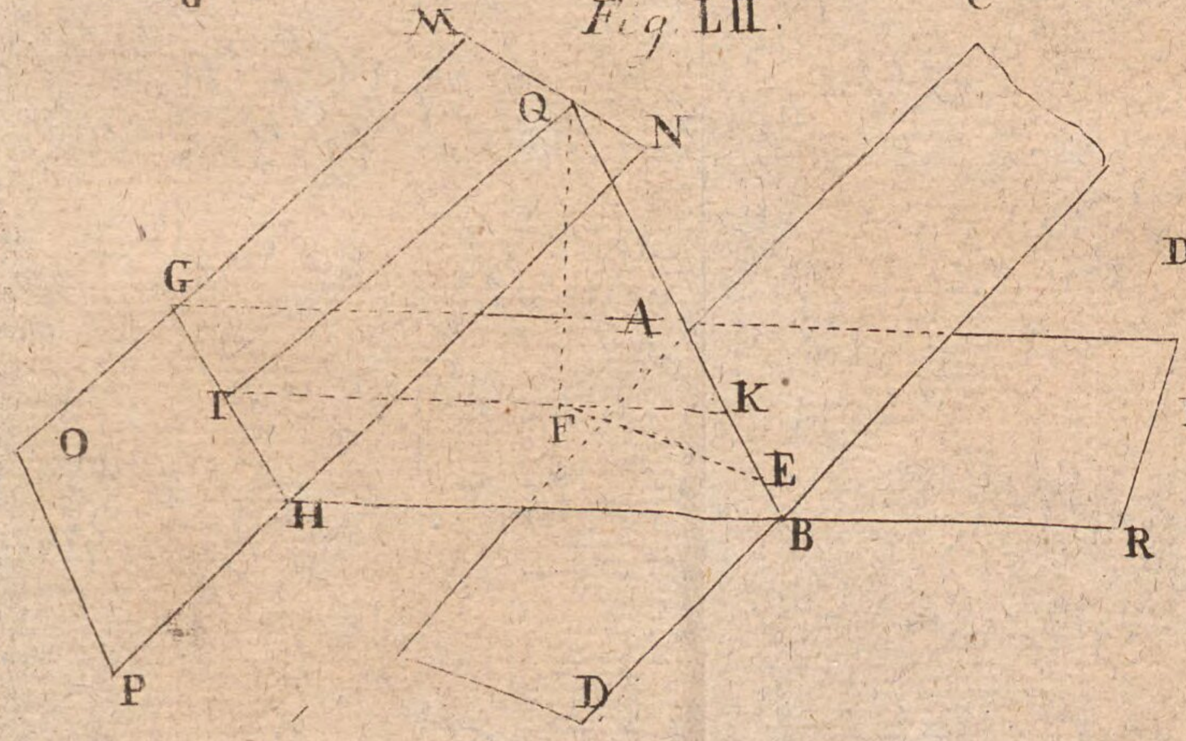


Fig. XLVI.

Fig. LIII.

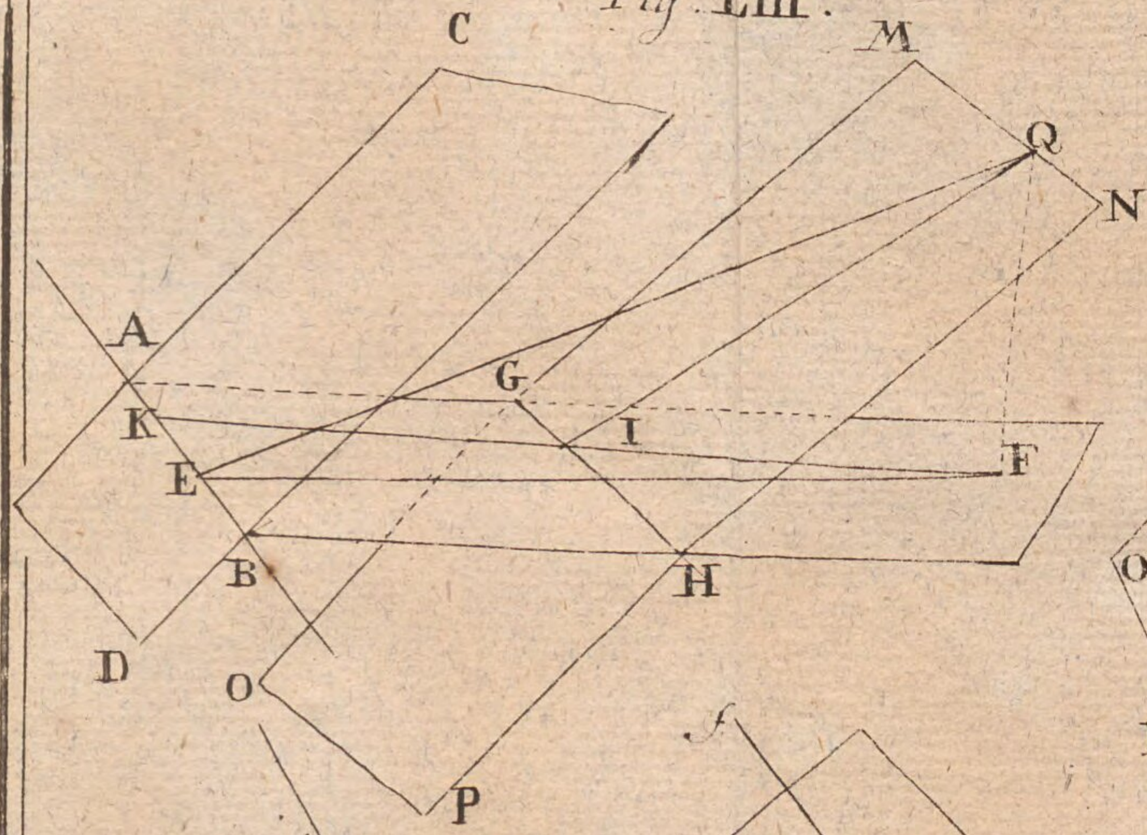


Fig. LIV.

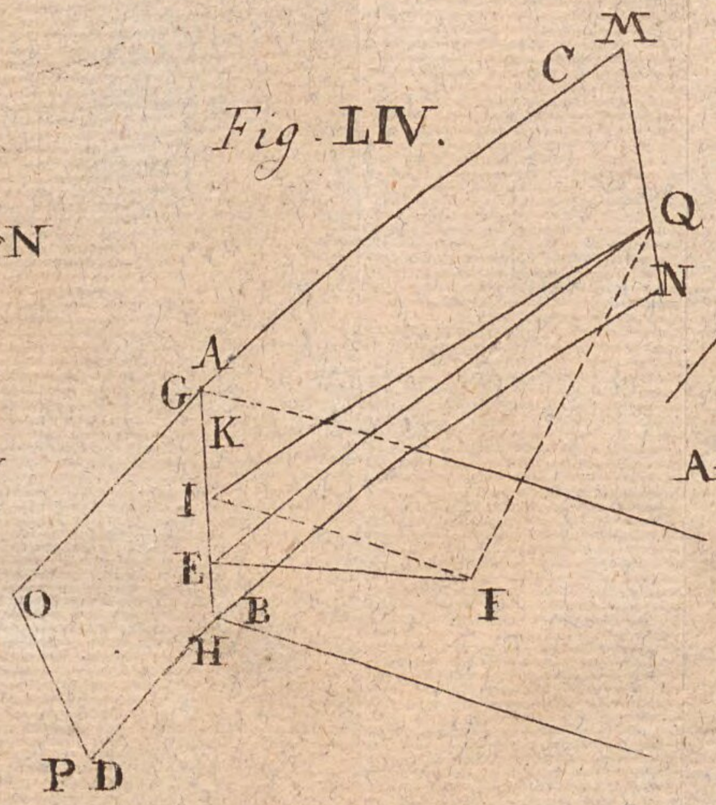


Fig. LV.

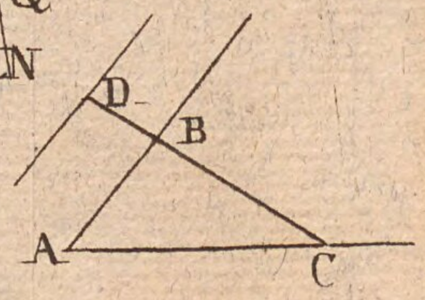


Fig. LVIII.

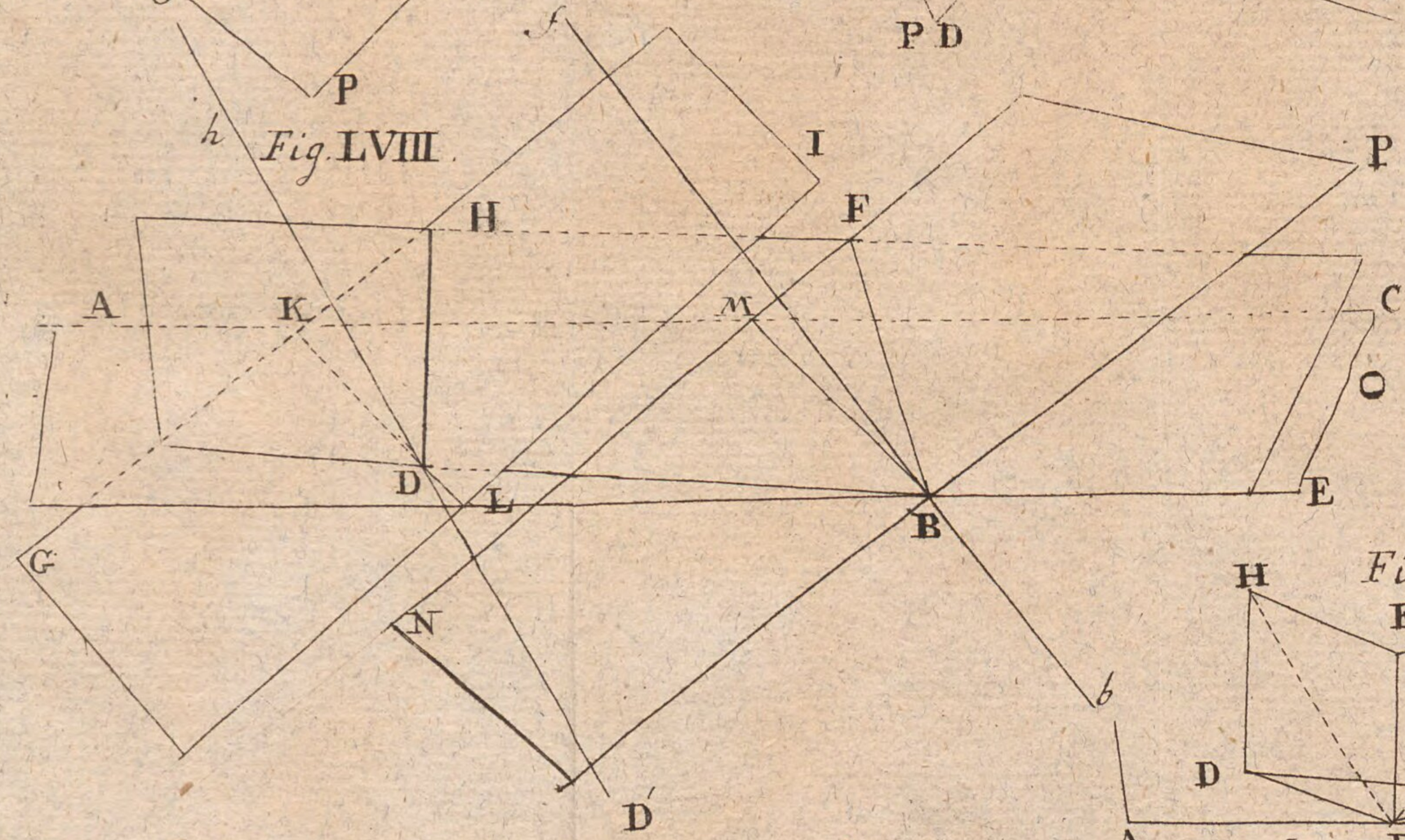


Fig. LVI.

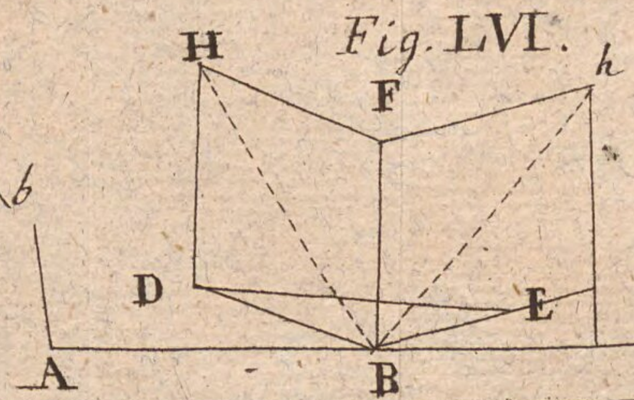


Fig. LVII.

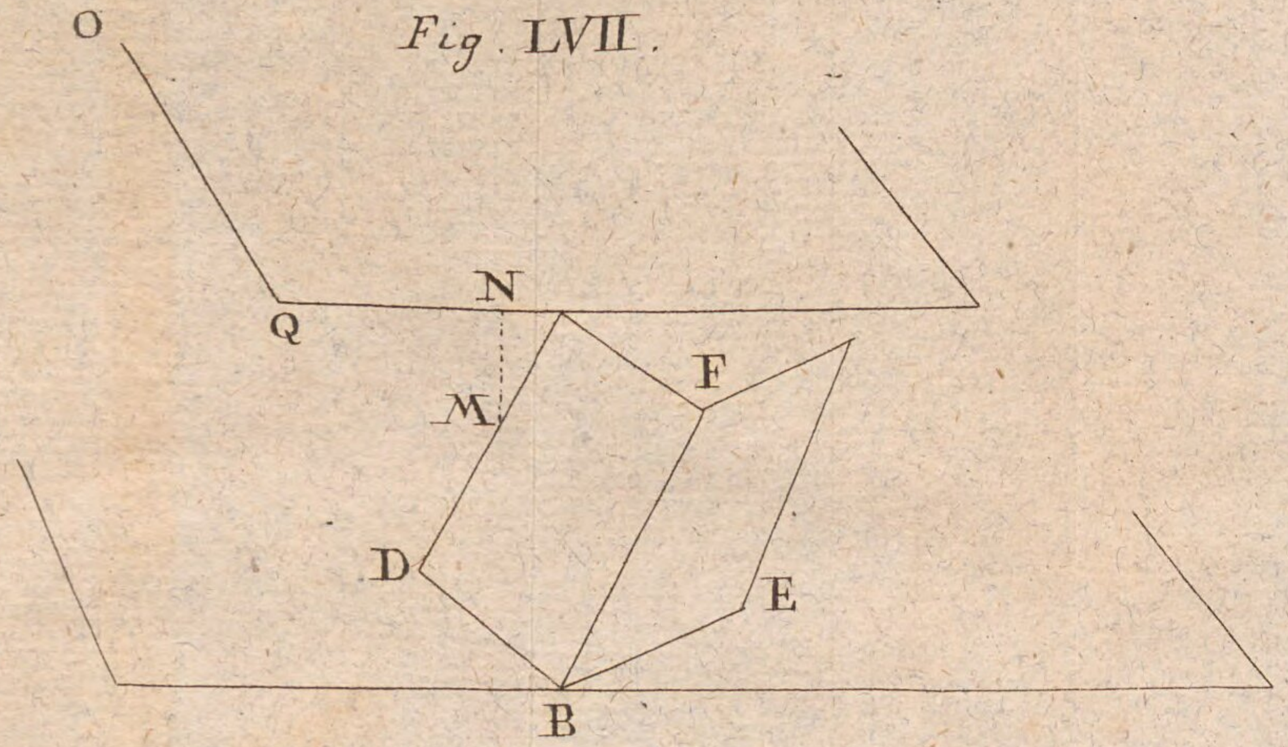
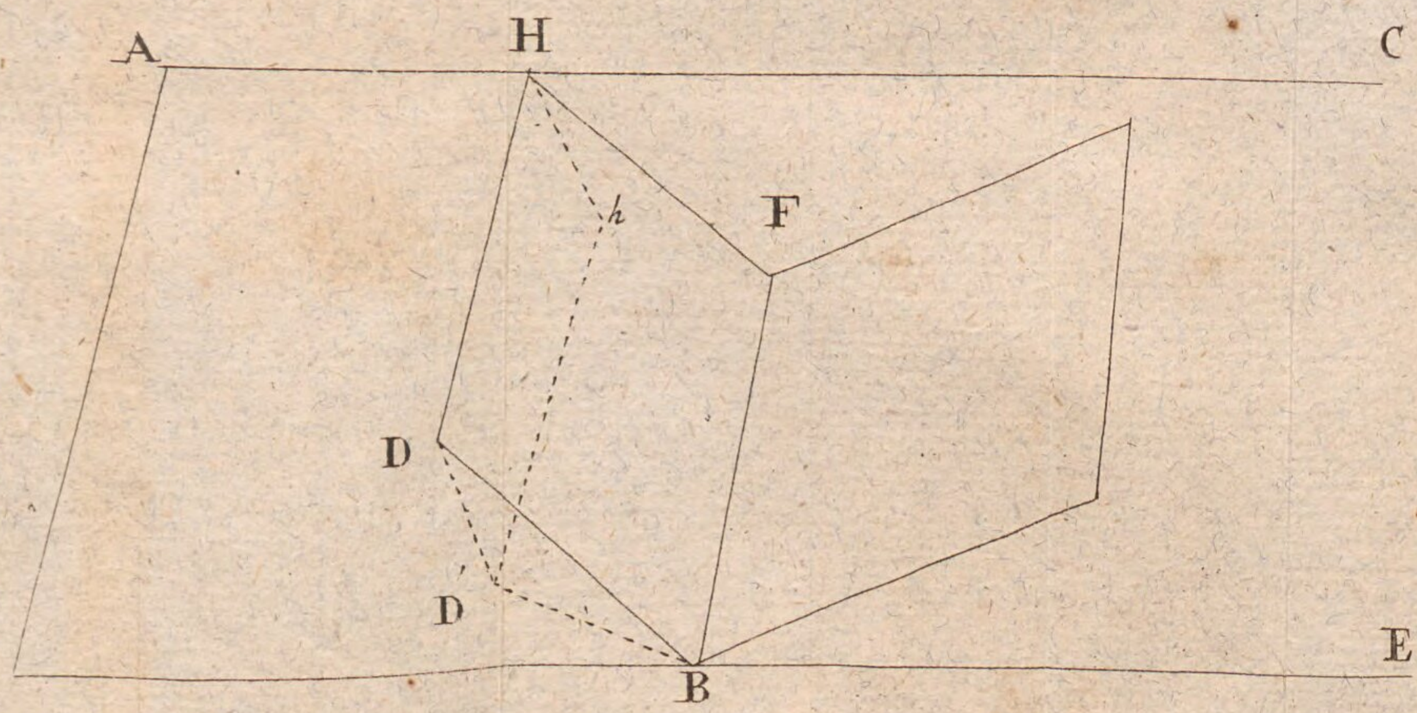


Fig LIX



III. Th. Tab. VII

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Lempe, Johann Friedrich,

Erläuterungen der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie

Bd.: 3

Altenburg (1781)

Math.u. 78-3
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10625435-6
VD18 15554449-001